

# Modelagem e Simulação do Wheelie em Cadeiras de Rodas Híbridas

## Motivação:

- Inclusão social e profissional de pessoas deficientes
- Danos físicos devido a ergonomia da cadeira de rodas manual e esforço muscular (danos nos membros superiores)
- "Wheelie" termo usado para empinar cadeiras de rodas { Habilidade (necessária para o cadeirante passar por obstáculos)
  - ↳ Leva muito tempo para os usuários aprender a executar esta tarefa.

## \* Simpósios e Congressos

- CBEB - Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica
- Simpósio Mineiro de Engenharia Biomédica
- CBMS - International Symposium on Computer-Based Medical Systems

## Revisão Bibliográfica

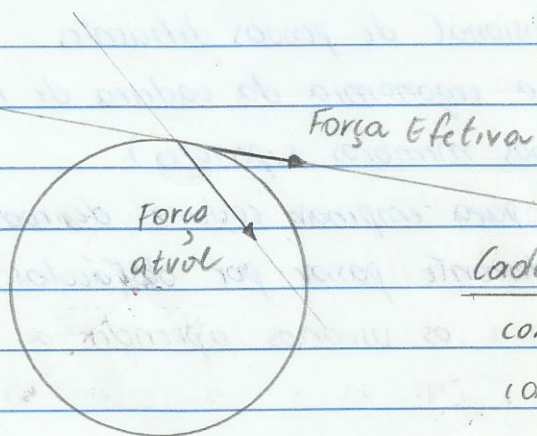
- Estudo do "wheelie"
- Tipos de cadeiras híbridas
- Sistema de mobilidade (Em Segway)
- Estratégias de controle
- Resistência ao Rolamento

## Vantagens do uso da cadeira híbrida:

- Diminuir o índice de lesões nos membros superiores (Ex. ombros)
- Independência do usuário para terrenos inclinados

## Definições

Fraction of Effective Force (FEF) É a razão da força tangencial pela resultante durante a propulsão



Cadeira	FEF
comum	< 80%
idosos	< 50%

Mechanical Fraction of effective force (MEF) Força resultante durante a propulsão manual para a locomoção da cadeira de rodas

$$MEF = \frac{F_{con}^2}{F_{res}^2} \times 100$$

Maximal Voluntary Force (MVF): Força máxima para propulsão da cadeira de rodas

Mechanical Use (MU): Indica a magnitude da força resultante na propulsão comparada com a capacidade do usuário.

$$MU = \frac{F_{res}}{MVF} \times 100$$

Relationship Between Resultant Force at the Pushrim and the Net Shoulder Joint Moments During Manual Wheelchair Propulsion in Elderly Persons (Desroches, G et al)

O artigo tem como objetivo determinar a relação entre a força resultante na propulsão e na articulação do ombro para cadeirantes idosos.

Os pesquisadores construíram uma cadeira de rodas instrumentada para realizar o experimento com um grupo de idosos. O usuário também seria instrumentado com sensores para gravar as posições com o auxílio de um software.

## Resultados e Discussões

\* Durante a propulsão manual para os indicadores MEF e MU altos, obtiveram um alto momento na articulação do ombro para as mesmas velocidades e força de saída. Portanto, para o usuário que realiza repetitivas tarefas e necessita de muita força é propício a ter lesões no ombro devido ao excesso.

*Experiments on step climbing and simulations on inverse pendulum control using robotic wheelchair with inverse pendulum control*

Objetivo: Cadeira de rodas robótica para ultrapassar degraus de 9cm sem ajuda.

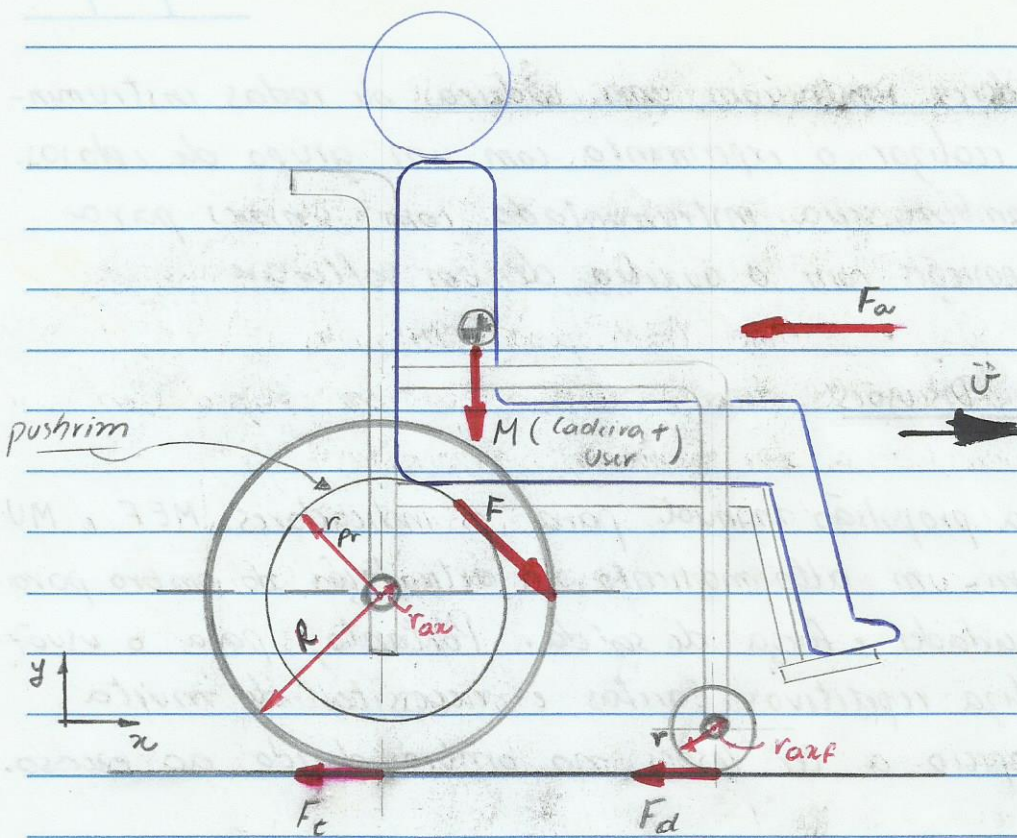
+ Força necessária para levantar as rodas dianteiras dependem da posição do eixo traseiro da roda.

- Existe dois tipos de posição: normal position and forward position

Normal position: Usado para obter estabilidade nas quatro rodas

Forward position: Usado para empinar a cadeira de rodas

Para a cadeira de rodas do Takahashi, existe o deslocamento do eixo da roda

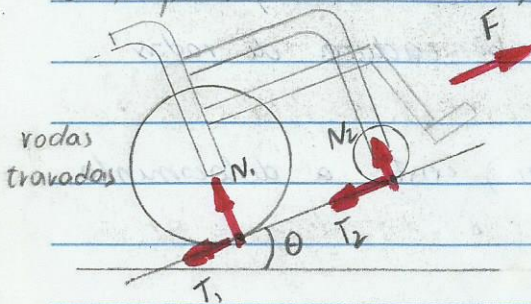


De acordo com Cooper, temos:

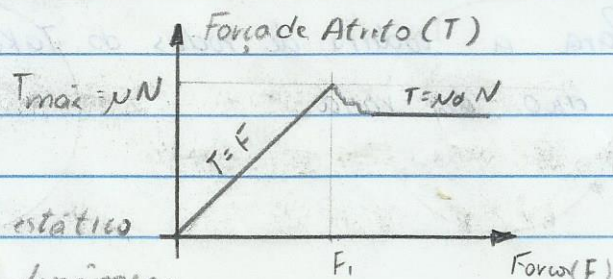
$$F \left( \frac{R}{r_{pr}} \right) = M\ddot{v} + \frac{I\ddot{v}}{R^2} + \frac{I_c\ddot{v}}{r_c^2} + F_{ax} + \frac{M_b}{r_{ax}} + \frac{M_b}{r_{axf}} + F_{fr} + F_{frf} + W \sin \theta(\alpha)$$

Lembrete: Durante o movimento da roda, não existe escorregamento, pois o ponto de contato entre a roda e o chão é nulo.

Caso as rodas estejam travadas e a cadeira de rodas em um plano inclinado, pode haver arrastamento ou não. Isso



... pode ser avaliado através da força Normal e coeficiente de atrito

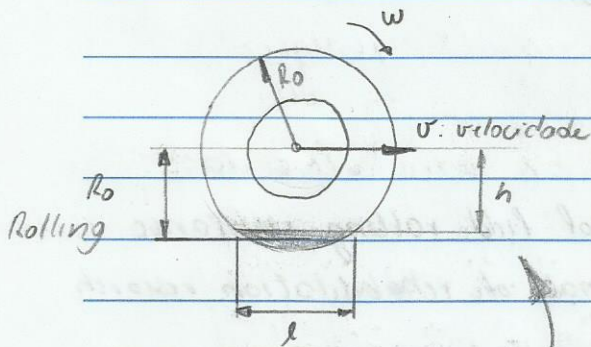


$\mu$ : coeficiente de atrito estático

$\mu_d$ : coeficiente de atrito dinâmico

## Resistência de Rolamento ("Rolling Resistance")

- Força de resistência no sistema mais importante
- Resistência de Rolamento é uma força resistiva causada pela rotação de um corpo (ex: roda de carro, bicicleta ou bola) em uma superfície. Geralmente causada por um efeito não elástico (por exemplo, pressão encontrada nos pneus)



$$R_0 = R - \frac{(R-h)}{3}$$

(Ver livro do Beer de Estática)  
pg 574-576

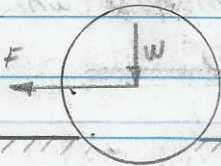
Cossalter, V. (2006). Motorcycle dynamics. Lulu.com, 2006

$C_{rr}$ : Coeficiente de rolamento

$N$ : Força Normal

$$F = C_{rr} N$$

$F$ : Força devido a resistência de rolamento



Portanto, as forças devido ao atrito de rolamento podem ser calculadas da seguinte maneira:

$$F_{roll} = \eta_t \frac{N_t}{R} - \eta_d \frac{N_d}{r}$$

$\eta_t$  e  $\eta_d$ : Coeficiente de atrito ao rolamento

$N_t$ : Força Normal da Roda Traseira

$N_d$ : Força Normal da Roda Dianteira

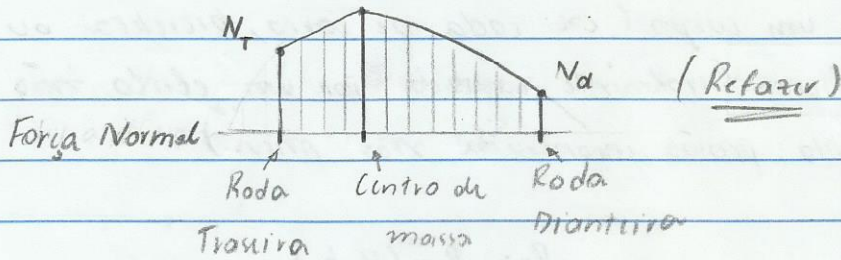
Van der Woude, L.H.V. et al. "Biomechanics and physiology in active manual wheelchair propulsion."

↑ (contem valores da força para diferentes tipos de carpetes)

## Perguntas:

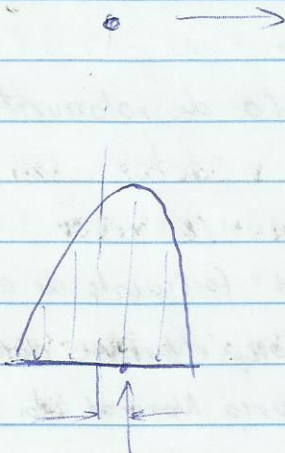
+ Como determinar as forças normais nas rodas traseiras e dianteira? Coeficiente de Rolamento?

Diagrama da forças distribuídas



## Leitura complementar:

- Sauret, Christophe, et al. "Assessment of field rolling resistance of manual wheelchairs." *Journal of rehabilitation research and development* 49.1 (2012).
- Kaulzlarich JJ. Wheelchair tire rolling resistance and torque (1985)
- Kaulzlarich JJ. wheelchair rolling resistance and tyre design. In: van der Woude LHV. *Biomedical aspects of manual wheelchair propulsion: state of the art II* (1999)



Anotações do Ackerman  
24/06/2015

$$\vec{M}_O = m(\vec{r}_O - \vec{O}) \wedge \vec{a}_O + J_O \alpha = \sum M_{O,i}$$

$$m h_G \cdot \ddot{\nu} = -mg \cdot a + N_F \cdot L$$

$$\ddot{\nu}^* = -\frac{a}{h_G} g$$

Tarefas: (Due 31/08/2015)

\* Equacionar modelo: Determinar Forças Normais através do TMA

### Revisão teórica

Momento de Inércia expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação.

- Quanto MAIOR momento de Inércia de um corpo, mais difícil será fazê-lo girar ou alterar sua rotação.

$$[I] = [ML^2] \text{ kgm}^2$$

### Teorema do Momento Angular:

Para um material S, com as seguintes informações:

$m_i$  : massa

$\vec{v}_i$  : velocidade

$P_i$  : ponto genérico

Podemos definir o momento angular, em relação ao ponto O, de acordo com o seguinte vetor:

$$\vec{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i ; m_i \vec{v}_i : \text{Quantidade de movimento de um ponto material}$$

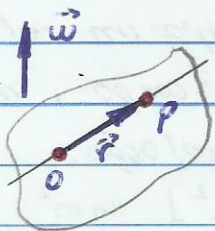
## Momento Angular de um sólido

a) Caso o material  $S$  tem movimento de translação  
(com velocidade  $\vec{v}$ )

$$\vec{H}_O = \sum (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \quad \therefore \boxed{\vec{H}_O = m (G - O) \vec{v}}$$
$$= \sum m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}$$

b) Caso o material  $S$  tem um movimento qualquer

De acordo com a fórmula de poisson para velocidade



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)} \quad \text{logo,}$$

$$\vec{H}_O = \sum (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$$
$$= \sum (P_i - O) \wedge m_i [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)]$$
$$= \sum m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_O + \sum m_i (P_i - O) \wedge \vec{\omega} \wedge (P - O)$$
$$= m (G - O) \wedge \vec{v}_O + \sum_2 \quad (\text{Equação I})$$

Para um sistema de coordenada  $O \hat{i} \hat{j} \hat{k}$ , com a origem  $O$  pertencente a  $S$ , temos:

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

$$(P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \quad ; \quad \text{logo:}$$

$$\vec{\omega} \wedge (P_i - O) = \omega_x (y_i \hat{k} - z_i \hat{j}) + \omega_y (z_i \hat{i} - x_i \hat{k}) + \omega_z (x_i \hat{j} - y_i \hat{i})$$

Substituindo na equação I e reduzindo as expressões para o momento de inércia  $J$ , temos:

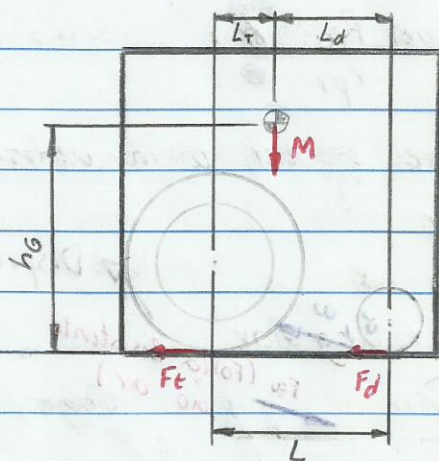
$$\vec{H}_O = m (G - O) \wedge \vec{v}_O + [\hat{i} \hat{j} \hat{k}] J_0 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$



Para determinar o teorema do momento angular para um sólido, deve-se derivar a expressão acima, resultan-  
do em:

$$m(\mathbf{g} - \mathbf{0}) \wedge \vec{a}_0 + \frac{d}{dt} [\ddot{\varphi} \vec{j} \vec{k}] J_0 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \vec{M}_0^{ext}$$

Admitindo o Sistema do CRM como um bloco, temos:



Corpo Rígido (Bloco)

Obs: Todos os pontos possuem uma velocidade devido a translação

Como o sistema apenas transla e não rotaciona, a derivada da velocidade é nula, logo temos

$$m(\mathbf{g} - \mathbf{0}) \wedge \vec{a}_0 = \sum M_0$$

Para origem localizada no ponto de contato da roda traseira, temos:

$$M(L_T \vec{i} + h_G \vec{j}) \wedge \ddot{\varphi} \vec{i} = -Mg L_T \vec{k} + N_d L \vec{k}$$

$$-M h_G \ddot{\varphi} = -Mg L_T + N_d L$$

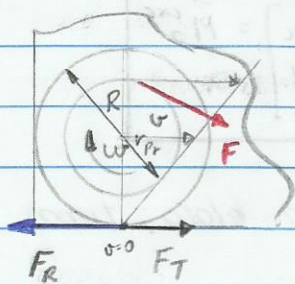
$$\therefore \ddot{\varphi} = \frac{M \cdot g \cdot L_T - N_d \cdot L}{M \cdot h_G}$$

Para eminência da transição de um sistema de 26 para 16 a força normal é nula:

$$\ddot{\varphi} = \frac{L_T \cdot g}{h_G}$$

## Modelo do Cooper:

$$F_v \left( \frac{R}{r_{pr}} \right) = M\ddot{u} + \frac{J}{R}\ddot{u} + \frac{J_r}{r}\ddot{u} + F_a + \frac{M_B}{r_{ax}} + \frac{M_b}{r_{axf}} + F_R + F_r + W \sin \theta(\alpha)$$



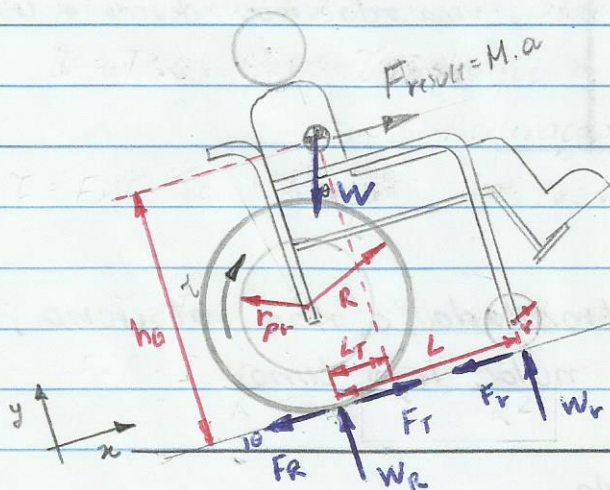
$$v = \omega R$$

$$P = F_v v = T \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{F_v v}{T}$$

O que é  $\frac{R}{r_{pr}}$  ?

## Modelo "Erivelton"



Desprezar força  $F_a$  (Força resistente ao ar)

Análise para  $\theta = 0^\circ$

→ Através da 2ª Lei de Newton:  $\sum F_{ext} = m \cdot a$

Eixo x:

$$F_R + F_r - F_T = -M\ddot{u} \quad (\text{Equação I})$$

Eixo y:

$$W_R + W_r - W = 0 \quad (\text{Equação II})$$

→ Aplicando o Teorema do Momento Angular na roda traseira.

$$m(0-0) \wedge a = \sum M$$

$$-M \cdot h_0 \cdot \ddot{\nu} = -M \cdot g \cdot L_T - W_r \cdot L \quad (\text{Equação III})$$

As equações normais podem ser escritas da seguinte forma:

$$W_r = \frac{M(g \cdot L_T - h_0 \cdot \ddot{\nu})}{L} \quad \text{Força Normal na roda dianteira em movimento}$$

$$\begin{aligned} W_R &= W - W_r \\ &= Mg - \frac{M(g \cdot L_T - h_0 \cdot \ddot{\nu})}{L} \\ &= \frac{M(g \cdot L - g \cdot L_T + h_0 \cdot \ddot{\nu})}{L} \end{aligned}$$

$$W_R = \frac{M[g(L - L_T) + h_0 \cdot \ddot{\nu}]}{L} \quad \text{Força Normal na roda traseira em movimento}$$

Forças de resistência ao rolamento,  $F_R$  e  $F_r$ :

$$F_R = C_{rr2} \cdot W_R \quad \text{e} \quad F_r = C_{rr1} \cdot W_r$$

Força de tração:

$$F_T = F_R + F_r - M \cdot \ddot{\nu}$$

$$F_T = C_{rr2} \cdot \frac{M[g(L - L_T) + h_0 \cdot \ddot{\nu}]}{L} + C_{rr1} \cdot \frac{M(g \cdot L_T - h_0 \cdot \ddot{\nu})}{L} + M \cdot \ddot{\nu}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{W_R} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{W_r}$

Para iminência para iniciar o "wheeling" a força normal dianteira é nula: ( $W_r = 0$ )

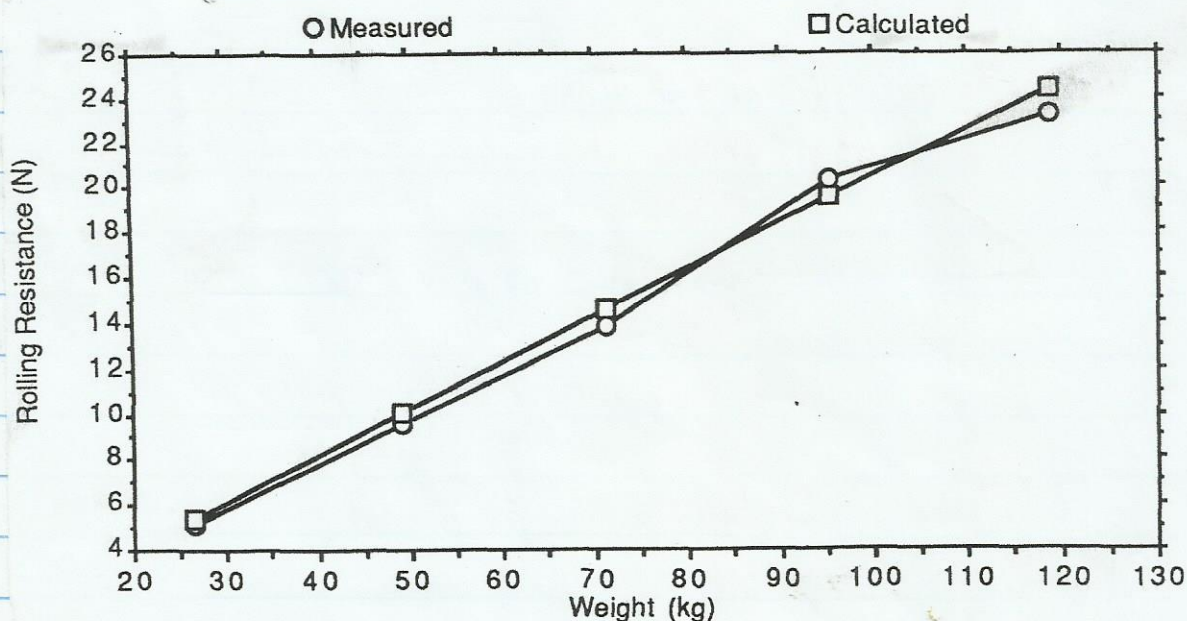
$$F_T = C_{rr2} \cdot \frac{M[g(L - L_T) + h_0 \cdot \ddot{\nu}]}{L} + M \cdot \ddot{\nu}$$

## Levantamento de dados a partir de bibliografias existentes

Lemaire, E. D., Lamontagne, M., Barclay, M. W., John, T., & Martel, G. (1991). A technique for the determination of center of gravity and rolling resistance for tilt-seat wheelchair. *J Rehabil Res Dev*, 28(3), 51-56.

O objetivo deste trabalho é determinar o centro de gravidade e a resistência ao rolamento de uma cadeira de rodas manual (CRM) através de uma plataforma. Profissionais da área acreditam que através do conhecimento dessas variáveis é possível ajustar a CRM para uma configuração que facilite na propulsão da CRM.

\* Centro de gravidade próximo do eixo traseiro  $\Rightarrow$  Resistência ao rolamento diminui, desde a resistência ao rolamento da roda traseira é menor que a roda dianteira.



Para validar os valores da resistência ao rolamento, foi comparado os valores calculados e medidos (Veja figura anterior).

A resistência ao rolamento total foi obtida através de uma célula de carga instrumentada para uma velocidade de 2.5 Km/h. Este experimento foi repetido para cargas de 25 a 120 Kg.

Table 1.

Distance from the rear wheel axle to the center of gravity for the subject-wheelchair complex (in centimeters) and the subject-wheelchair weight (in kilograms).

	Weight (kg)	Seat Up (cm)		Seat Back (cm)	
		Front	Rear	Front	Rear
Dummy	100.00	17.1	13.3		
Subject 1	103.75	16.3	10.0		
Subject 2	129.66	22.9	14.8		
Subject 3	91.18	18.8	12.5		
Subject 4	73.41	18.9	14.0		
Subject 5	83.64	20.3	14.5		

Seat up is standard seating position; seat back corresponds to a seat angle of 116 degrees to the horizontal.

Table 2.

Rolling resistance values (in newtons) for the front wheel, rear wheel and the total of all four wheels of a tilt-seat wheelchair.

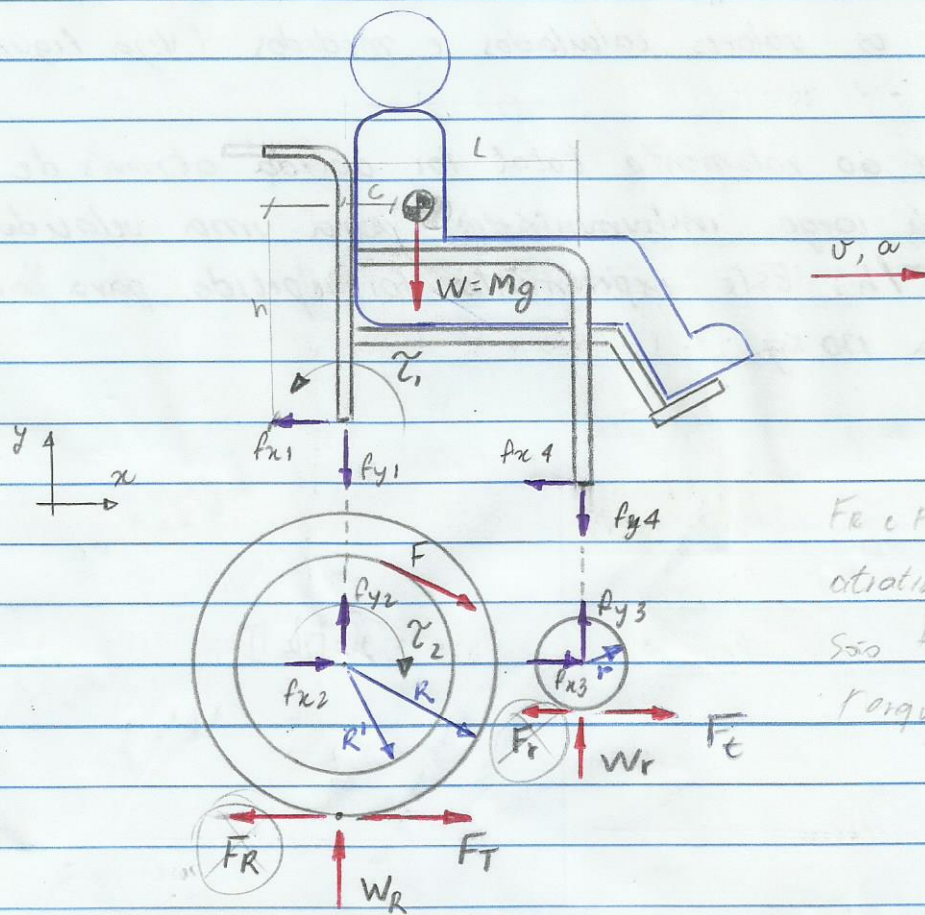
	Seat Up (N)			Seat Back (N)		
	Front	Rear	Total	Front	Rear	Total
Dummy	14.77	6.83	42.20	11.53	7.70	38.46
Subject 1	13.69	7.57	42.52	8.41	8.98	34.78
Subject 2	23.94	7.65	63.18	15.49	9.90	50.78
Subject 3	14.16	6.31	40.94	9.39	7.58	33.94
Subject 4	11.23	4.95	32.36	5.95	6.36	24.62
Subject 5	13.71	5.40	38.22	9.78	6.44	32.44

Seat up is standard seating position; seat back corresponds to a seat angle of 116 degrees to the horizontal.

Reunião com Ackmar: 31/08/2015

- Dividir cadeira de rodas em tres partes para determinar modelo
- Métodos para determinar momento de inércia
- Plataforma para determinar CG

# Modelo da Cadeira de Rodas



$F_e$  e  $F_r$  não são forças  
otativas ou reativas,  
são forças devido ao  
frenagem.

Aplicando teorema do movimento do baricentro para a  
cadeira de rodas + Usuário temos:

$$m \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \quad \text{TMB}$$

Eixo x:

$$F_T + F_e = M \cdot \ddot{x} \quad (\text{Equação 1})$$

Eixo y:

$$W_R + W_r = W ; W = M \cdot g \quad (\text{Equação 2})$$

Aplicando teorema do momento angular para cada parte  
do modelo:

$$m(\vec{G}-O) \wedge \vec{a}_O + \frac{d}{dt} [i, j, k] I_O \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \vec{M}^{ext} \quad \text{TMA}$$

Para Roda traseira (Aplicando no eixo da roda)

$$J_R \cdot \ddot{\theta} = \tau - F_T \cdot R - \tau_R$$

Sabendo que:  $\theta = \frac{x}{R} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{v}}{R}$

$$\tau = F \cdot R' \text{ e } \tau_R = F_R \cdot R$$

Portanto,

$$J_R \cdot \frac{\dot{v}}{R} = F \cdot R' - F_T \cdot R - F_R \cdot R$$

$$J_R \cdot \frac{\dot{v}}{R^2} = \frac{F \cdot R'}{R} - F_T - F_R \quad (\text{Equação 3})$$

Para Roda dianteira:

$$J_r \cdot \ddot{\alpha} = -F_e \cdot r - \tau_r$$

Sabendo que  $\alpha = \frac{x}{r}$ ,  $\dot{\alpha} = \frac{v}{r}$ ,  $\ddot{\alpha} = \frac{\dot{v}}{r}$ ;  $\tau_r = F_r \cdot r$

$$J_r \cdot \frac{\dot{v}}{r} = -F_e \cdot r - F_r \cdot r$$

$$J_r \cdot \frac{\dot{v}}{r^2} = -F_e - F_r \quad (\text{Equação 4})$$

Substituindo (3), (4) em (1)

$$\frac{F \cdot R'}{R} - F_T - \frac{J_R \cdot \dot{v}}{R^2} - F_R - \frac{J_r \cdot \dot{v}}{r^2} = M \dot{v}$$

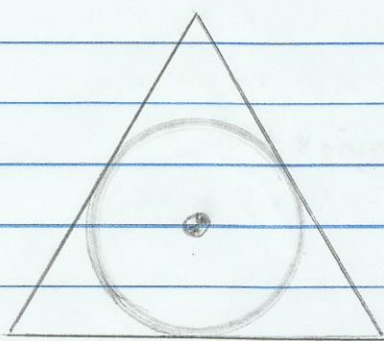
$$\therefore \boxed{\frac{F \cdot (R')}{R} = \left( M + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{r^2} \right) \dot{v} + F_T + F_R}$$

Próximas tarefas:

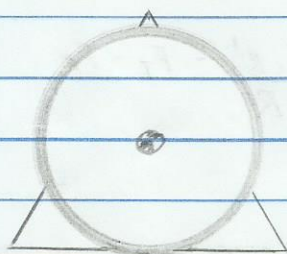
- \* Determinar momentos de Inércia experimentalmente das rodas
- \* Determinar Centro de Gravidade

Métodos para determinar Momento de Inércia:

- Trifilar suspension
- Torsional pendulum



Trifilar Suspension



↑  
Base triangular suspensa com auxílio de 3 fios. O centro de massa do corpo deve estar alinhado com o centro de massa da base.

Depois é aplicado um pequeno torque para que ocasiona a rotação do prato.  
deslocamento

$$I_{Bzz} = \frac{R^2 g T^2 (m_p + m_b)}{4\pi^2 L} - I_{pzz}$$

$$I_{zz} = \frac{R^2 m g T}{4\pi^2 L}$$

Detalhamento dos cálculos no artigo:

du Bois, J.L - Error Analysis in Trifilar Inertial Measurements



Genta, G., Delprete, C. (1992) Some Considerations on the Experimental Determination of Moments of Inertia.

Geralmente o experimento para determinar o momento de inércia de um corpo é através de um pêndulo de torção e pêndulo multifilar.

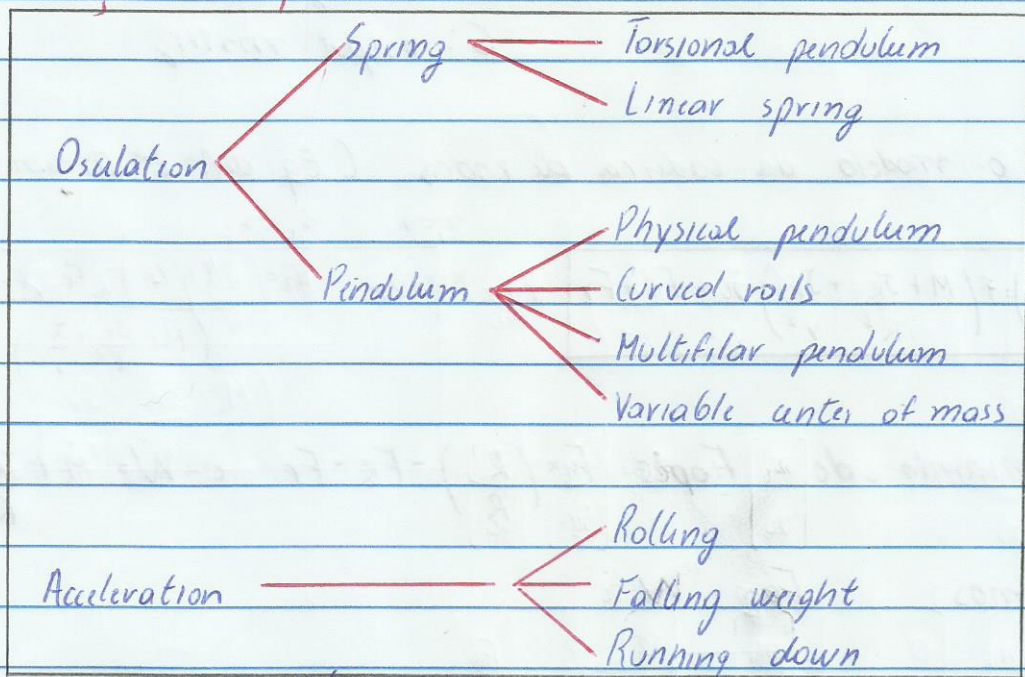
O momento de inércia pode ser medido por teste dinâmico. Ou seja, através da rotação pode se obter um movimento periódico e não periódico.

Dois tipos de métodos

Aceleração: Movimento não periódico e  $J$  obtido pela aceleração angular

Oscilação: Movimento periódico e  $J$  obtido pelo período da oscilação

Classificação dos experimentos existentes:



Os testes devido a ~~aceleração~~<sup>oscilação</sup> são superiores que os testes da aceleração devido a independência da oscilação. Ou seja, existe uma facilidade e flexibilidade para realização do experimento com pouco erro.

## State-Space Representation

Para um sistema com equação diferencial de 1ª Ordem:

$$\dot{x} = dx = f(x(t), u(t), t)$$

$x(t)$ : "state vector" para tempo  $t$

$u(t)$ : entrada

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$x$ : vetor de estados

$\dot{x}$ : derivada do vetor de estados

$u$ : input

$y$ : output vector

$A$ : matriz ( $n \times n$ )

$C$ : output matrix

Para o modelo da cadeira de rodas (Eq. dif. 2ª Ordem.)

$$F \cdot \left( \frac{R'}{R} \right) = \begin{pmatrix} M + J_R + J_r & \\ & R^2 \quad r^2 \end{pmatrix} \ddot{x} + F_R + F_r$$

$$x_1 = x \quad \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} \quad \dot{x}_2 = \frac{F \cdot \left( \frac{R'}{R} \right) - F_R - F_r}{\left( M + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{r^2} \right)}$$

1 Chamando de  $F_{op} = F \cdot \left( \frac{R'}{R} \right) - F_R - F_r$  e  $W = M + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{r^2}$

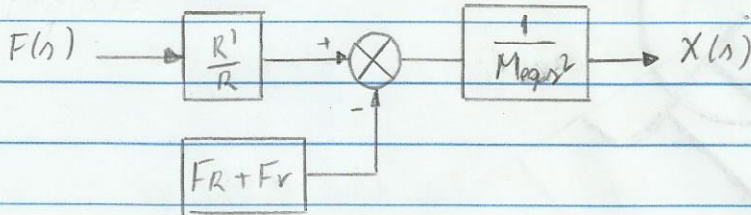
temos:  $F_{op} = W \ddot{x}$

A transformada de Laplace sera

$$F_{op}(s) = W s^2 X(s)$$

Portanto

$$F_{eq}(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow X(s) \quad G(s) = \frac{X(s)}{F_{eq}(s)} = \frac{1}{M_{eq} s^2}$$



Considerando atrito viscoso no rolamento, temos:

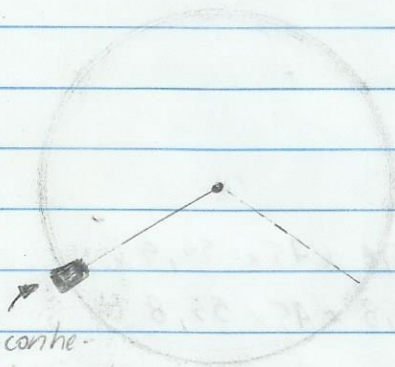
$$\boxed{G(s) = \frac{1}{M_{eq} s^2 + K s}}$$

- 11 -

Experimento para obter momento de inércia:

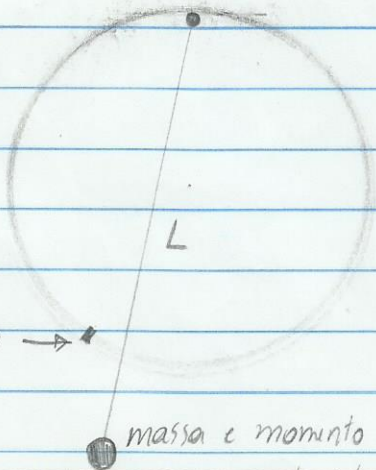
Período de um pêndulo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad [s]$$



massa conhecida e momento de inércia

L: Varia o comprimento até obter a os dois corpos com a mesma oscilação



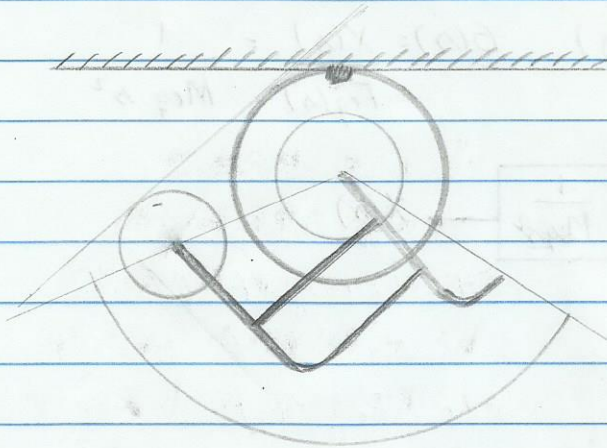
Movimento →

massa e momento de inércia conhecida

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mL^2}{mgl}}$$

$$J_0 = mL \left( \frac{g T^2}{4\pi^2} - L \right), \quad T = \frac{t}{n}$$

## Experimento para obter momento de inércia da CR



## Experimento desaceleração

### Regressão Linear

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

Beto:  $3,2044 - 0,2759t$

Erivelton:  $3,527625 - 0,23412t$

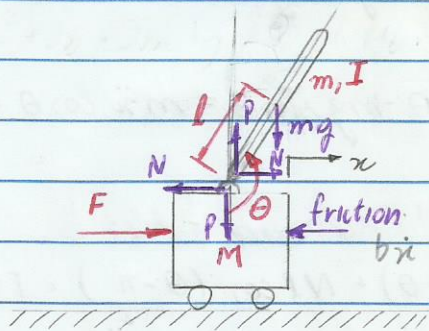
Cadira:  $2,2747 - 0,1873t$

Massas com abraçadeiras: 930  $\square$   $48,8 \times 45 \times 53,9$

922  $\square$   $48,8 \times 45 \times 53,8$

## Modelo Dinâmico da CR como pêndulo invertido

- Modelo apenas de um pêndulo invertido



F: Força aplicada

M: massa do carro

m: massa do pêndulo

l: comprimento do CG

I: Momento de Inércia do pêndulo

$\theta$ : Ângulo do pêndulo

Diagrama do corpo livre no carrinho:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (I)$$

Diagrama do corpo livre no pêndulo:

$$\ddot{x} = l\ddot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{x}' = l\ddot{\theta}\cos\theta$$

$$\ddot{x}'' = l[\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} - l\sin\theta] = l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$N = m\ddot{x} + m\ddot{x}'$$

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \quad (II)$$

Somando (I) e (II)

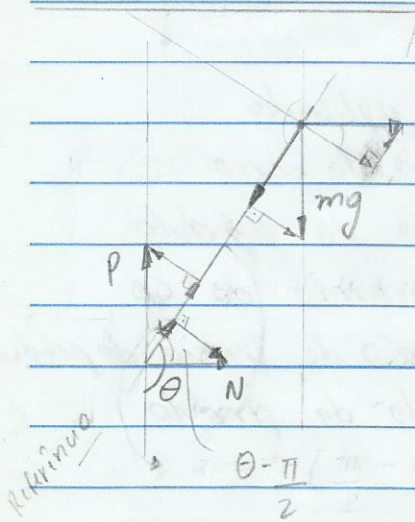
$$M\ddot{x} + b\dot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad (III)$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

Calculando as forças horizontais do pêndulo



$$P \sin(\pi - \theta) - mg \sin(\pi - \theta) - N \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) =$$

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = m \ddot{x} \cos \theta + m l \ddot{\theta} \quad (I)$$

TMA:

$$-P l \sin(\pi - \theta) + N l \cos(\theta - \pi) = I \ddot{\theta}$$

$$-P l \sin \theta - N l \cos \theta = I \ddot{\theta}$$

$$-P \sin \theta - N \cos \theta = \frac{I \ddot{\theta}}{l} \quad (II)$$

Subtração de arcos trigonométricos

$$\sin(a-b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(\theta - \pi/2) = \cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

Usando equações I e II

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta - P \sin \theta - N \cos \theta = m \ddot{x} \cos \theta + m l \ddot{\theta} + \frac{I \ddot{\theta}}{l}$$

$$-m g l \sin \theta = m \ddot{x} \cos \theta + m l \ddot{\theta} + \frac{I \ddot{\theta}}{l}$$

$$(m l^2 + I) \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = -m l \ddot{x} \cos \theta$$

Admitindo que o sistema sempre estiver próximo do equilíbrio

$$\cos \theta = \cos(\pi + \phi) \approx -1$$

$$\sin \theta = \sin(\pi + \phi) \approx -\phi$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0$$

$$(I + m l^2) \ddot{\theta} - m g l \phi = m l \ddot{x}$$

$$(I + m) \ddot{x} + b \dot{x} - m l \ddot{\theta} = v$$

## Experimento para determinar momento de inércia da roda

Massa 1: (53,9 x 48,8 x 45) mm

$m_{\text{roda}} = 2,546$

$m = 0,930$  Kg

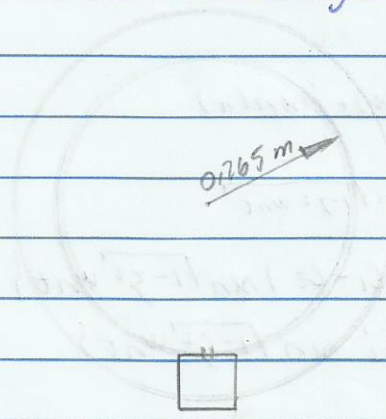
$m_1 + m_2 = 1,852$  Kg

Massa 2: (53,8 x 48,8 x 45) mm

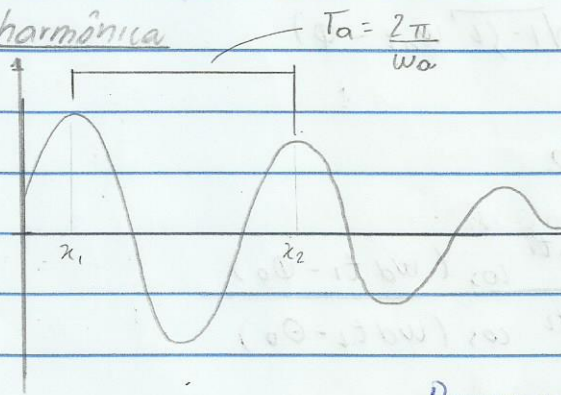
$m = 0,922$  Kg

$$h_1 = \frac{0,265 + 0,054}{2} = 0,1595 \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{0,265 + 0,054}{2} = 0,1595 \text{ m}$$



### Oscilação harmônica



Decremento logarítmico representa

Tipos de oscilação harmônica a taxa de redução da amplitude de uma vibração livremente

$\xi = 0$  Não amortecida  $\sim$

amortecida.

$\xi = 1$  Amortecido  $\sim$

amortecida.

$\xi > 1$  Superamortecido  $\sim$

É definido como o logaritmo natural da razão entre duas amplitudes sucessivas

$\xi < 1$  Subamortecido  $\sim$

Para sistema subamortecido

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = (-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$$

$$s_2 = (-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t}$$

Notação de Euler  $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$$x(t) = C_1 e^{-\zeta\omega_n t} e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + i(C_1 - C_2) \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \right\}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1' \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) + i C_2' \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t) \right\}$$

$$= X e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \varphi) \quad ; \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

$$= X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \varphi)$$

Decremento logarítmico

$$x_1 = X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \theta_0)$$

$$x_2 = X_0 e^{-\zeta\omega_n t_2} \cos(\omega_d t_2 - \theta_0)$$

$t_2 = t_1 + \tau_d$  ;  $\tau_d$ : Período de vibração amortecida

$$x_1 = e^{-\zeta\omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \theta_0)$$

$$x_2 = e^{-\zeta\omega_n (t_1 + \tau_d)} \cos(\omega_d (t_1 + \tau_d) - \theta_0)$$

$$\cos(\omega_d (t_1 + \tau_d) - \theta_0) = \cos(\omega_d t_1 - \theta_0 + 2\pi) =$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1 + \tau_d)}}$$

$$= e^{\zeta\omega_n \tau_d}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta\omega_n \tau_d}$$

$$\frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta\omega_n \tau_d}$$



## Decremento logarítmico $\delta$

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n \tau_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \delta^2 = \frac{4\pi^2 \zeta^2}{1-\zeta^2}$$

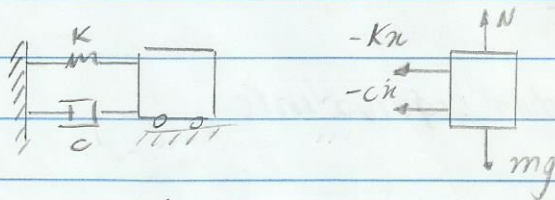
$$\delta^2 - \delta^2 \zeta^2 = 4\pi^2 \zeta^2$$

$$\zeta^2 (4\pi^2 + \delta^2) = \delta^2$$

$$\zeta^2 = \frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Fator de amortecimento  
adimensional

## Constante de amortecimento crítica



$$m\ddot{x} = -Kx - c\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\therefore m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + Ke^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t} (m\lambda^2 + c\lambda + K) = 0$$

$$m\lambda^2 + c\lambda + K = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

Coefficiente de  
amortecimento crítico

$$c_c^2 = 4mK \quad \therefore \quad c_c = \sqrt{4mK} = \sqrt{2^2 \frac{m^2 K}{m}}$$

Lembrando que  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\hookrightarrow c_c = 2m\omega_n$$

Fator de amortecimento

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Portanto,

$$\delta = \zeta \omega_n \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}$$
$$= \frac{2\pi \omega_n \times c}{\omega_d \times 2m\omega_n} \quad \delta = \frac{\pi c}{m \omega_d}$$

Sabendo que  $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$

$$[m.k.] = \text{kg} \times \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{e} \quad [c] = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

### Análise do pendulo

Momento de Inercia do pendulo equivalente

$$J_{eq} = J_R + m_p \cdot h^2$$

Sabendo que:

$$J \ddot{\theta} + c_T \dot{\theta} + k_T = 0$$

$$c_T = 2\zeta \sqrt{k_T \times J_{eq}} \quad \text{e} \quad k_T = m_p \times gh$$

Para  $\theta_1 = \theta$

$$\theta_2 = \dot{\theta} = \dot{\theta}_1$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_2 = \frac{-c_T \dot{\theta}_2 - k_T}{J_{eq}}$$

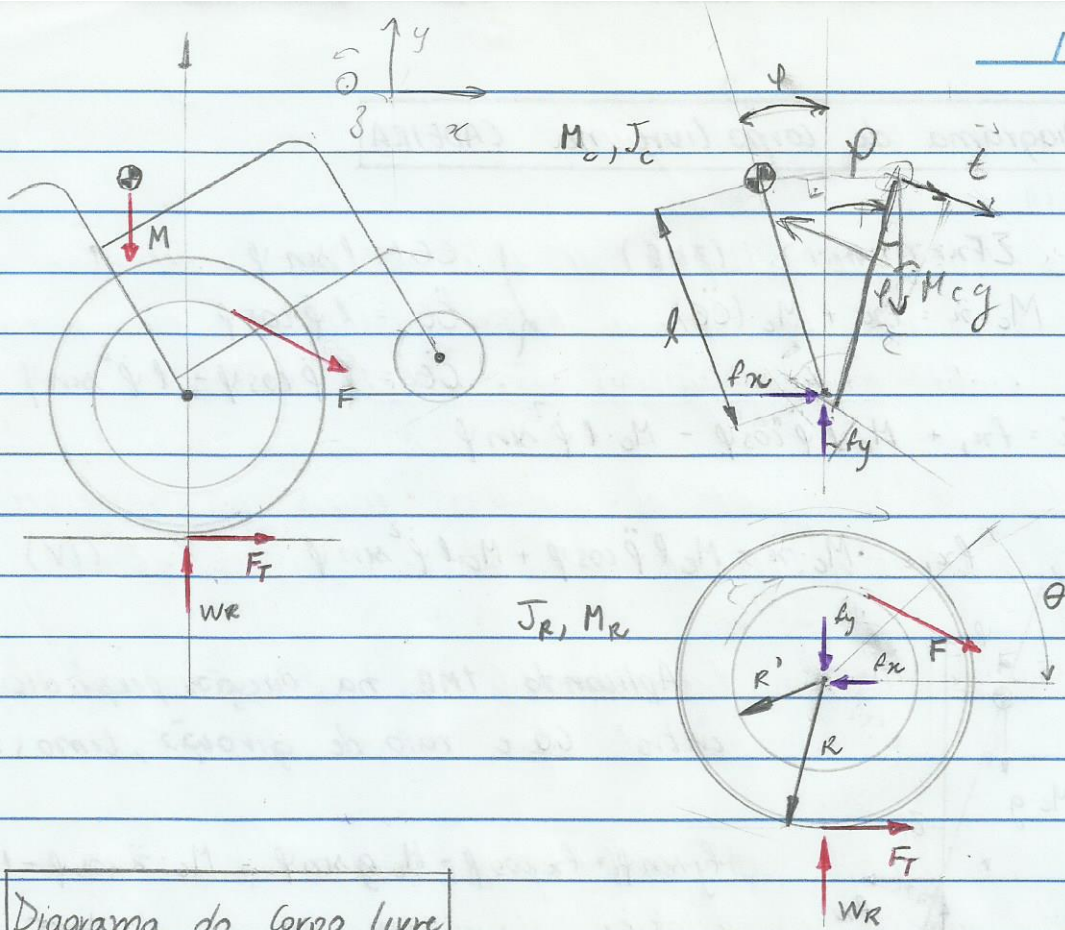


Diagrama do corpo livre na RODA

$$\sum F_x = m \cdot a \quad (\text{TMB})$$

$$M_R \cdot \ddot{x} = F_T - f_x \quad (\text{I})$$

Aplicando TMA, temos:

$$-J_R \cdot \ddot{\theta} = -F \cdot R' + F_c \cdot R + \tau_R$$

$$J_R \cdot \ddot{\theta} = F \cdot R' - F_c \cdot R - F_R \cdot R$$

$$\frac{J_R \cdot \ddot{\theta}}{R} = F \cdot \left(\frac{R'}{R}\right) - F_c - F_R$$

Portanto,  $F_c = F \left(\frac{R'}{R}\right) - F_R - \frac{J_R \cdot \ddot{\theta}}{R} \quad (\text{II})$

Substituindo II em I, temos:

$$M_R \cdot \ddot{x} = F \left(\frac{R'}{R}\right) - F_R - \frac{J_R \cdot \ddot{\theta}}{R} - f_x$$

Logo:  $f_x = F \left(\frac{R'}{R}\right) - F_R - \frac{J_R \cdot \ddot{\theta}}{R} - M_R \ddot{x} \quad (\text{III})$

## Diagrama de corpo livre na CADEIRA

$$\sum F_x = m \cdot a \quad (\text{TMB})$$

$$M_c \cdot \ddot{x} = f_{x1} + M_c \cdot (\ddot{CG})_x$$

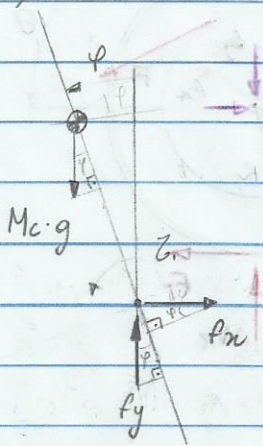
$$CG = l \sin \varphi$$

$$\dot{CG} = l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\ddot{CG} = l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$M_c \cdot \ddot{x} = f_{x1} + M_c l \ddot{\varphi} \cos \varphi - M_c l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

→ logo,  $f_{x1} = M_c \cdot \ddot{x} - M_c l \ddot{\varphi} \cos \varphi + M_c l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$  (IV)



Aplicando TMB na direção perpendicular entre CG e raio de giro, temos:

$$f_y \sin \varphi + f_x \cos \varphi - M_c g \sin \varphi = M_c \cdot \ddot{x} \cos \varphi - M_c l \ddot{\varphi} \quad (V)$$

Aplicando TMA:  $f_y l \sin \varphi + f_x l \cos \varphi = J_c \ddot{\varphi} - F \cdot R'$

$$f_y \sin \varphi + f_x \cos \varphi = \frac{J_c \ddot{\varphi} - F \cdot R'}{l} \quad (VI)$$

Substituindo (VI) em (V)

$$\frac{J_c \ddot{\varphi} - F \cdot R'}{l} - M_c g \sin \varphi = M_c \cdot \ddot{x} \cos \varphi - M_c l \ddot{\varphi}$$

$$J_c \ddot{\varphi} - F \cdot R' - M_c g l \sin \varphi = M_c l \ddot{x} \cos \varphi - M_c l^2 \ddot{\varphi}$$

(VII) Para  $\ddot{x} = \ddot{\theta} R$

$$J_c \ddot{\varphi} - F \cdot R' - M_c g l \sin \varphi = M_c l R \cos \varphi \ddot{\theta} - M_c l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\boxed{-(M_c l R \cos \varphi) \ddot{\theta} + (M_c l^2 + J_c) \ddot{\varphi} = M_c g l \sin \varphi + F \cdot R'}$$

→ Usando as equações I e IV

$$M_R \ddot{x} = F_c - (M_c \ddot{x} - M_c l \ddot{\varphi} \cos \varphi + M_c l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

Logo  $F_c = (M_R + M_c) \ddot{x} - M_c l \ddot{\varphi} \cos \varphi + M_c l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$

Igualando com a equação II

$$\frac{F(R')}{R} - F_R - \frac{J_R \ddot{\theta}}{R} = (M_R + M_c) \ddot{x} - M_c l \ddot{\varphi} \cos \varphi + M_c l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

Para  $\ddot{x} = \ddot{\theta} R$  e multiplicando por R

$$F R' - F_R R - J_R \ddot{\theta} = (M_R + M_c) R^2 \ddot{\theta} - M_c R l \ddot{\varphi} \cos \varphi + M_c R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$\boxed{[-(M_R + M_c) R^2 - J_R] \ddot{\theta} + (M_c R l \cos \varphi) \ddot{\varphi} = M_c R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - F R' + F_R \cdot R}$$

Para a linearização do sistema para  $\varphi \approx 0$ , podemos ter um erro  $\phi$ .

Para  $\phi$  muito pequeno

$$\cos(0 + \phi) = 1$$

$$\sin(0 + \phi) = \phi$$

$$\dot{\theta}^2 \cdot \phi^2 \approx 0$$

(Explain linearization with Taylor Series)  
\* Supplement for material 3.2 Planning linear

$$\boxed{\begin{aligned} &[-(M_R + M_c) R^2 - J_R] \ddot{\theta} + M_c R l \ddot{\varphi} = -F \cdot R' + F_R \cdot R \\ &- M_c R l \ddot{\theta} + (M_c l^2 + J_c) \ddot{\varphi} = -M_c g l \theta - F \cdot R' \end{aligned}}$$

$\varphi$  ↑

## Espaço de estados

ESPAÇO DE ESTADOS pode ser utilizada para representar sistemas não lineares que possuem folgas, saturação e zona morta.

Pode existir condições iniciais não nula. (Nise)

Estado: É o conjunto de grandezas físicas que, se especificadas, caracterizam completamente a evolução do sistema.

Variáveis de estado: Variáveis utilizadas para caracterizar o estado.

\* Para um sistema de ordem  $n$ , escrevemos  $n$  equações diferenciais simultâneas de primeira ordem em função dos variáveis de estado

$x$ : vetor de estado

$\dot{x}$ : derivada do vetor de estado no tempo

$y$ : vetor de saída

$u$ : vetor de entrada ou vetor de controle

A: Matriz do Sistema

B: Matriz de Entrada

C: Matriz de Saída

D: Matriz de transmissão direta

Equação de estado  $\rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

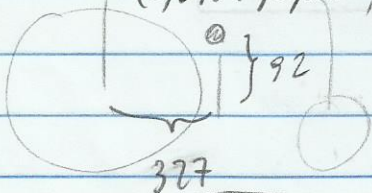
Equação de saída

(SKILL CAPTURE) Video 4 coach

$\bullet (-0,5288; 0,7003)$

$(0,2964; 0,3968)$   $m_c = 20 \text{ Kg}$

$m_u = 80 \text{ Kg}$



$$C_6 x = \frac{-0,5288 \times 80 - 0,2964 \times 20}{100} = -0,48$$

eixo  $(-0,6234, 0,305)$

$$C_y = \frac{0,7003 \times 80 + 0,3968 \times 20}{100} = 0,64$$

Modelo com 2 DOF

$$\begin{aligned} [J_R + (M_C + M_R)R^2] \ddot{\theta} + M_C R l \cos \varphi \ddot{\varphi} - M_C R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= \bar{b} - \bar{b}_R \\ (M_C R l \cos \varphi) \ddot{\theta} + (J_C + M_C l^2) \ddot{\varphi} - M_C g l \sin \varphi &= -\bar{b} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_R + (M_C + M_R)R^2 & M_C R l \cos \varphi \\ M_C R l \cos \varphi & J_C + M_C l^2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} -M_C R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ -M_C g l \sin \varphi \end{bmatrix}}_k = \begin{bmatrix} \bar{b} - \bar{b}_R \\ -\bar{b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi & \dot{x}_1 &= x_2 & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= M^{-1} \cdot \left( \begin{bmatrix} \bar{b} - \bar{b}_R \\ -\bar{b} \end{bmatrix} - k \right) \\ x_2 &= \dot{\varphi} & \dot{x}_2 &= x_3 \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

Para linearizar o modelo, temos  $\begin{cases} \cos \varphi \approx 1 \\ \sin \varphi \approx \varphi \\ \dot{\varphi}^2 \approx 0 \end{cases}$

$$\text{Portanto: } \begin{bmatrix} J_R + (M_C + M_R)R^2 & M_C R l \\ M_C R l & J_C + M_C l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M_C g l \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} - \bar{b}_R \\ -\bar{b} \end{bmatrix}$$

Representação de um sistema SISO

$$\begin{cases} H_1 \ddot{\theta} + H_2 \ddot{\varphi} = \bar{b} - \bar{b}_R \\ H_2 \ddot{\theta} + H_3 \ddot{\varphi} - M_C g l \varphi = -\bar{b} \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace e  $\bar{b}_R = 0$

$$\begin{cases} H_1 s^2 \theta(s) + H_2 s^2 \varphi(s) = \bar{b}(s) & \text{(I)} \\ H_2 s^2 \theta(s) + H_3 s^2 \varphi(s) - M_C g l \varphi(s) = -\bar{b}(s) & \text{(II)} \end{cases}$$

Usando (I), temos:  $\theta = \frac{\bar{b} - H_2 s^2 \varphi(s)}{H_1 s^2}$

Logo,

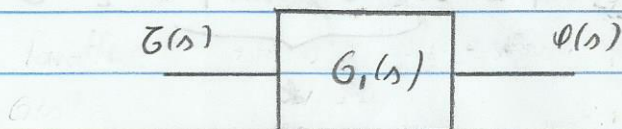
$$H_2 \bar{b} s^2 - H_2^2 s^4 \varphi(s) + H_1 H_3 s^4 \varphi(s) - H_1 M_C g l s^2 \varphi(s) = -H_1 s^2 \bar{b}(s)$$

Dividindo por  $s^2$

$$H_2 \bar{\theta} - H_2 \lambda^2 \varphi(\lambda) + H_1 H_3 \lambda^2 \varphi(\lambda) - H_1 M_0 g l \varphi(\lambda) = -H_1 \bar{\theta}(\lambda)$$

$$(-H_2^2 + H_1 H_3) \lambda^2 \varphi(\lambda) - H_1 M_0 g l \varphi(\lambda) = -(H_1 + H_2) \bar{\theta}(\lambda)$$

$$G_1(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\bar{\theta}(\lambda)} = \frac{H_1 + H_2}{(H_2 - H_1 H_3) \lambda^2 + H_1 M_0 g l}$$

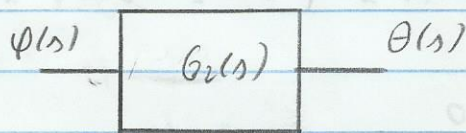


Iguando (I) e (II)

$$H_1 \lambda^2 \theta + H_2 \lambda^2 \varphi = -H_2 \lambda^2 \theta - H_3 \lambda^2 \varphi + M_0 g l \varphi$$

$$(H_1 + H_2) \lambda^2 \theta = [-(H_2 + H_3) \lambda^2 + M_0 g l] \varphi$$

$$G_2(\lambda) = \frac{\theta}{\varphi} = \frac{-(H_2 + H_3) \lambda^2 + M_0 g l}{(H_1 + H_2) \lambda^2}$$





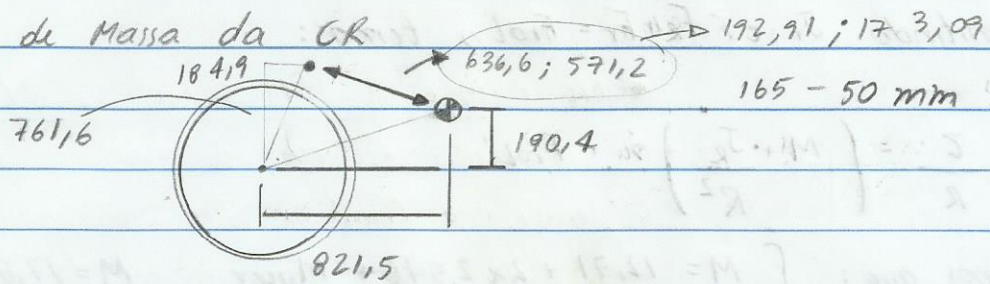
# Revisão de Parâmetros

Massa da roda: 2,546 Kg

Massa da cadeira:

Diametro da Roda traseira: 24" = 609,6 mm

Centro de Massa da CR



184,9 → 56,03 mm

761,6 → 230,79 mm

190,4 → 57,7 mm

821,5 → 248,94 mm

255,54 mm

## Resistência ao Rolamento

$$\frac{G}{R} = \left( M + \frac{J_R}{R^2} + \frac{J_r}{r^2} \right) \dot{\alpha} + F_R + F_r \quad (\text{Eq. Dinâmica para 1º dm})$$

Admitindo  $J_r$  e  $F_R + F_r = F_{rol}$ , temos:

$$\frac{G}{R} = \left( M + \frac{J_R}{R^2} \right) \dot{\alpha} + F_{rol}$$

Sabemos que:

$$\begin{cases} M = 12,71 + 2 \times 2,546 + M_{uscr} & \therefore M = 17,8 + M_{uscr} \\ R = 0,305 \\ J_R = 0,140 \end{cases}$$

$$G = \left( M + \frac{J_R}{R^2} \right) R \cdot \dot{\alpha} + F_{rol}$$

M [kg]	$\dot{\alpha}$ [ml/s <sup>2</sup> ]	
0	-0,1876	4 → 12 s
72	-0,2508	10 → 14 s
90	-0,2845	6 → 11 s

$$G_i = K_i + F_{rol}$$

- A tensão ( $v_b$ ) no rotor é chamada força contra-eletromotriz (f.cem) (f.cem é proporcional à velocidade)

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$\left\{ \begin{array}{l} v_b: \text{tensão no rotor ou força contra-eletromotriz} \\ K_b: \text{constante do gerador} \end{array} \right.$

Aplicando a transformada de Laplace em  $v_b(t)$ :

$$V_b(s) = K_b s \Theta_m(s) \quad (I)$$

Aplicando lei de Kirchhoff das malhas, temos:

$$R_a I_a(s) + L_a I_a(s) + V_b(s) = E_a(s) \quad (II)$$

O Torque resultante no motor é proporcional à corrente na armadura:

$$T_m(s) = K_T E_a(s) \quad (III)$$

$\left\{ \begin{array}{l} K_T: \text{constante de torque do motor} \\ I_a: \text{corrente de armadura} \end{array} \right.$

$$I_a(s) = \frac{T_m(s)}{K_T} \quad (IV)$$

Relacionando-se as equações I, II, III e IV, temos:

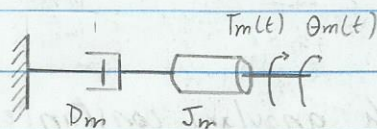
$$(R_a I_a(s) + s L_a I_a(s) + V_b(s) = E_a(s))$$

$$(R_a + s L_a) I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$$

$$(R_a + s L_a) \frac{T_m(s)}{K_T} + K_b s \Theta_m(s) = E_a(s)$$

A função de transferência é dada pela relação  $\Theta_m(s)/E_a(s)$

$$(R_a + s L_a) T_m(s) + K_b K_T s \Theta_m(s) = K_T E_a(s)$$



$$T_m(s) = (J_m s^2 + D_m s) \Theta_m(s)$$

Inércia equivalente      amortecimento viscoso

na armadura      na armadura

Carroamento mecânico equivalente

típico sobre um motor

$$(R_a + L_a s)(J_m s^2 + D_m s) \Theta_m(s) + K_b K_T s \Theta_m(s) = K_t E_a(s)$$

$$[(R_a + L_a s)(J_m s^2 + D_m s) + K_b K_T s] \Theta_m(s) = K_t E_a(s)$$

Geralmente a indutância da armadura é muito menor que a resistência; portanto podemos desconsiderar  $L_a$

$$[R_a (J_m s^2 + D_m s) + K_b K_T s] \Theta_m(s) = K_t E_a(s)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} &= \frac{K_t}{R_a (J_m s^2 + D_m s) + K_b K_T s} \\ &= \frac{K_t}{R_a J_m s \left[ s + \frac{1}{J_m} \left( D_m + \frac{K_b K_T}{R_a} \right) \right]} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t / (R_a J_m)}{s \left[ s + \frac{1}{J_m} \left( D_m + \frac{K_b K_T}{R_a} \right) \right]}$$

Função de transferência da armadura completa

$J_m$  e  $D_m$ : Constantes mecânicas

Relacionando as equações:  $V_b(s) = K_b s \Theta_m(s)$

$$R_a I_a(s) + L_a I_a(s) + V_b(s) = E_a(s)$$

$$I_a(s) = \frac{T_m(s)}{K_t} + \dots$$

$$\frac{R_a}{K_t} T_m(s) + K_b s \Theta_m(s) = E_a(s) \quad \text{Para } L_a = 0$$

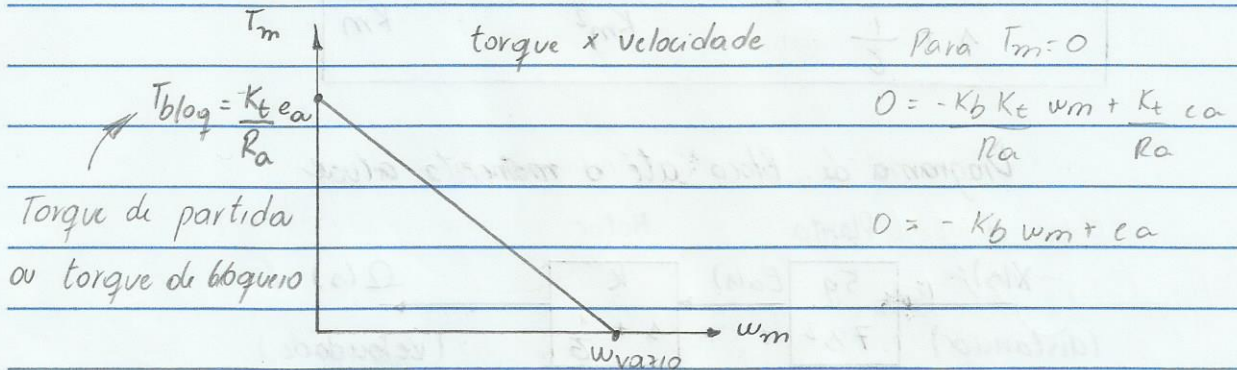
$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{R_a}{K_t} T_m(s) + K_b s \Theta_m(s) = E_a(s) \right] =$$

$$\frac{R_a}{K_t} T_m(t) + K_b \omega_m(t) = e_a(t)$$

Para aplicação do motor com velocidade angular constante:

$$\frac{R_a}{K_t} T_m + K_b \omega_m = e_a$$

$$T_m = (e_a - K_b \omega_m) \times \frac{K_t}{R_a} \quad \therefore \quad T_m = \frac{-K_b K_t}{R_a} \omega_m + \frac{K_t}{R_a} e_a$$



Torque de partida  
ou torque de bloqueio

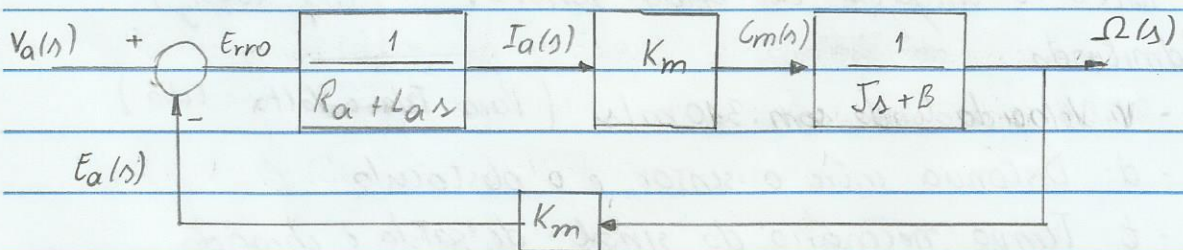
↳ Velocidade angular para torque nulo  
(Velocidade sem carga ou velocidade em vazio)

Portanto;

$$K_t = \frac{R_a \times T_{blog}}{e_a}$$

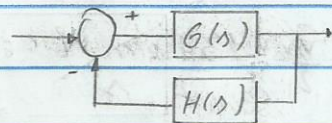
$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{vazio}}$$

Modelagem de um servo motor cc (De acordo com Apostila)



$$G(s) = \frac{K_m}{(R_a + L_a s)} \cdot \frac{1}{J s + B}$$

$$H(s) = K_m$$



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

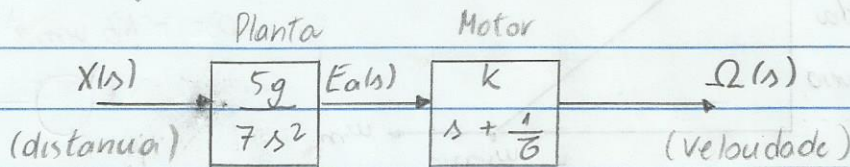
$$F(s) = \frac{K_m}{L_a J s^2 + (L_a B + R_a J) s + R_a B + K_m^2}$$

Geralmente  $L_a$  e  $B$  são aproximadamente nulo

$$F(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{R_a J s + K_m^2}$$

$$F(s) = \frac{K}{s + \frac{1}{\tau}} ; \tau = \frac{R_a J}{K_m^2} \text{ e } K = \frac{1}{K_m}$$

Diagrama de Bloco até o momento atual



8/5/2015

Sensor ultrassônico HC-SR04 } Resolução: 3mm  
Med. min = 2,5cm Med. max = 4,3m

Funcionamento: Este sensor é composto de um emissor e um receptor de ondas sonoras. O emissor envia um sinal, quando existe um objeto em sua direção, a onda sonora é refletida e capturada pelo receptor do sensor. Portanto, o sensor mede o tempo de saída e chegada da onda sonora. (freq 40KHz)

Admitindo:

- V: Velocidade do som: 340 m/s (Para Ida e Volta: Echo)
- d: Distância entre o sensor e o obstáculo
- t: Tempo necessário do sinal de saída e chegada

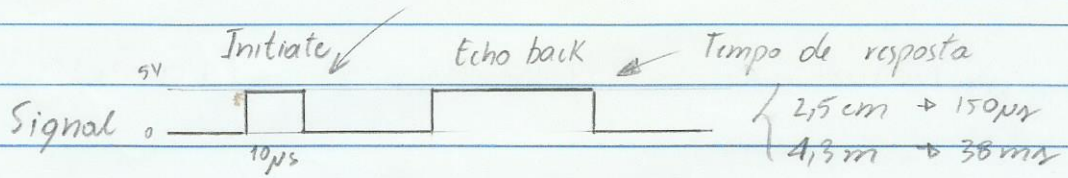
$$V' = \frac{V}{2} = \frac{340 \text{ m}}{2} = 170 \cdot 10^2 \frac{\text{cm}}{10^3 \text{ ms}}$$

velocidade: 17 cm/ms ; logo o sinal percorre 58,82ms em 1cm. Portanto:

$$58,82 \text{ ms} - 1 \text{ cm} \quad \therefore d = \frac{t}{58,82}$$

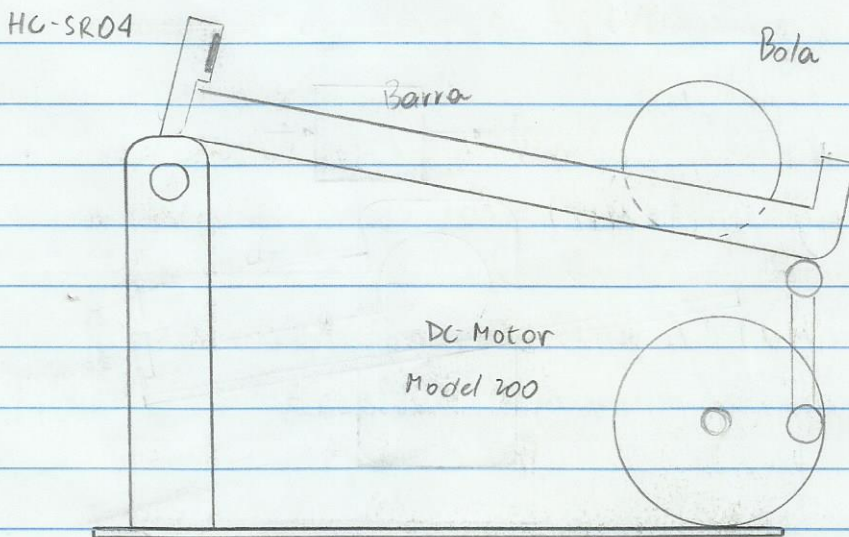
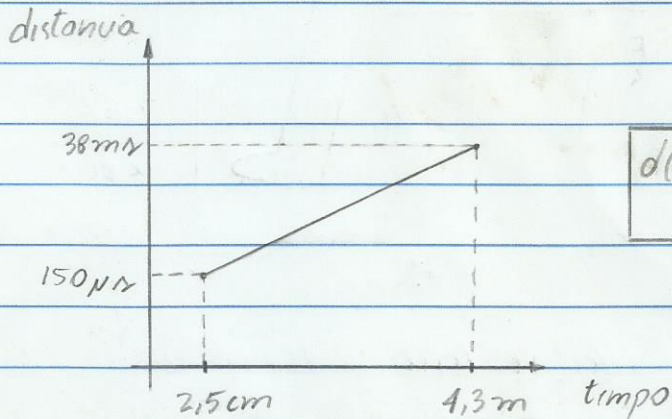
tempo de resposta (t)

Inicia a medição



8 pulso de  
40KHz para medir

logo:  $d = \frac{\text{Pulso}}{58}$



- O que temos:
- Modelo do motor
  - Modelo do sistema (Bola e Barra)
  - Modelo do sensor

Próximo Passo: - Relação da velocidade ( $\Omega$ ) com distancia

# Biomedical Instrumentation

## Medical and Physiological Parameters

EMG  $\rightarrow$  0,1 - 5 mV  $\rightarrow$  DC 10 kHz

## Basic Sensors and Principles

Chapter 2 - Medical Instrumentation

Transducer: Device that converts energy from one form to another.

Actuator: Converts an electrical signal to a physical output.

BIOLOGIC SYSTEMS have ELECTRIC ACTIVITY.

This activity can be:

- x Constant DC electric field
- x Constant flux of charge-carrying particles or current
- x Time-varying electric field
- x etc...

## EMG (Electromyogram)

Muscle contraction produces small electric currents. The amplitude of the surface EMG signal (sEMG) varies from the  $\mu$ V to the low mV range.

The sEMG signal depends of:

- The timing and intensity of muscle contraction
- the distance of the electrode from the active muscle area;
- the properties of the overlying tissue
- the quality of contact between the electrode and the skin



Source of Noise

Ambient Noise: Generated by Electromagnetic devices.  
The dominant frequency component is 50Hz or 60Hz.

Transducer Noise: Generated by the electrode-skin junction.

- DIC Voltage Potential: Caused by differences in the impedance between the skin and the electrode sensor, and from oxidative and reductive chemical reactions taking place in the contact region between the electrode and the conductive gel.

- AIC Voltage Potential: Generated by factors such as fluctuations in impedance between the conductive transducer and the skin.

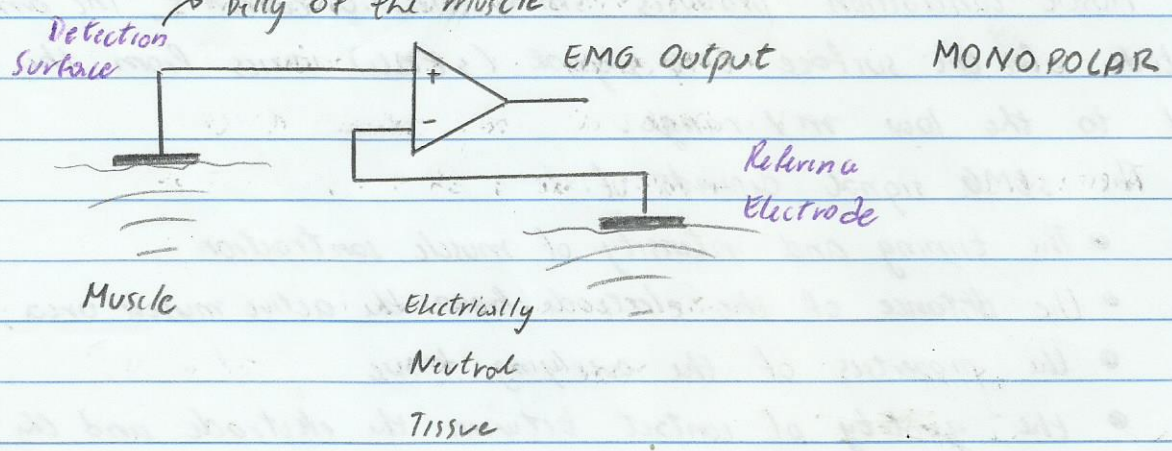
To Decrease Impedance Effect is to use Ag-AgCl electrodes.

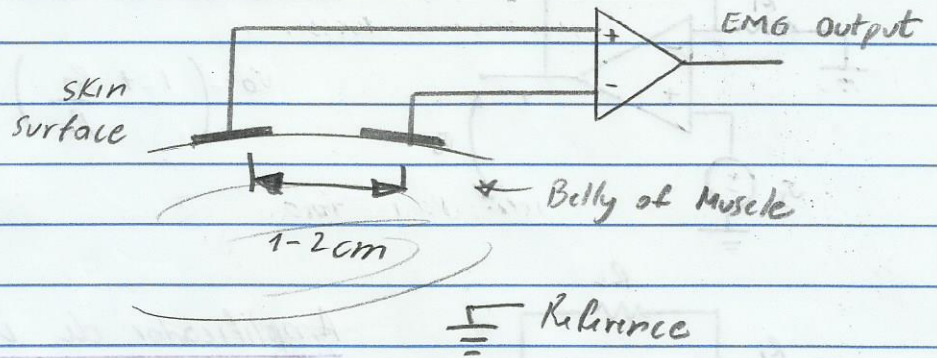
Best way to get a clean signal is using BIPOLAR ELECTRODE arrangements.

Convert Ionic current flow to electronic current flow

Monopolar vs. Bipolar EMG

Belly of the muscle

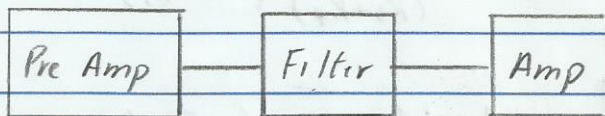




The main advantage of bipolar configuration is to eliminate the noise, because it amplifies the difference.

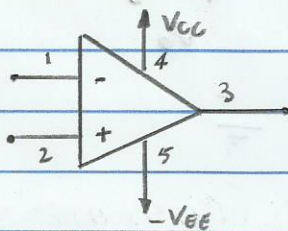
- 11 -

### Basic Circuit



low pass  
high pass

## AMPLIFICADORES OPERACIONAIS

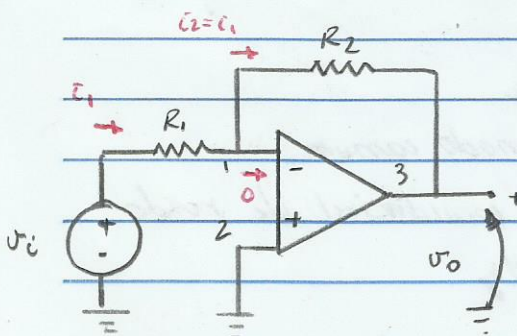


### Amp Op Ideal

- x Impedância entrada Infinita
- x Impedância de saída nula
- x Ganho de Modo Comum Nulo

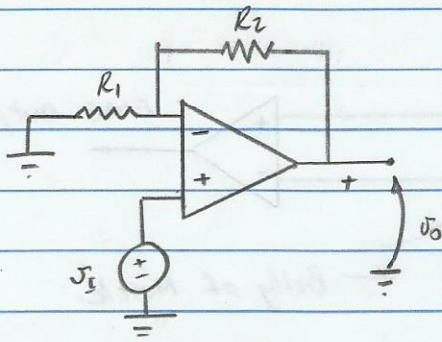
$$v_3 = A(v_2 - v_1) \quad (\text{Rejeição de modo comum infinita})$$

### Amplificador Inversor



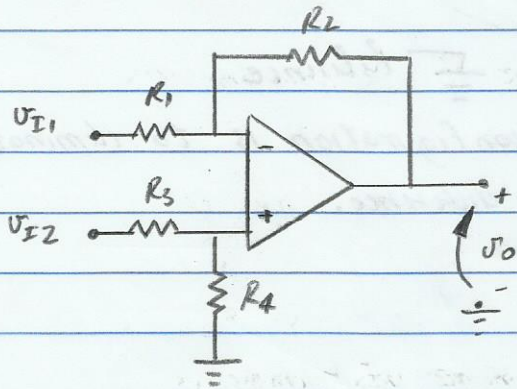
$$G_{mf} = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} \quad p/A = \infty$$

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_i$$



### Amplificador não - Inversor

$$V_O = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_I$$



### Amplificador de Diferenças

p/  $\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$

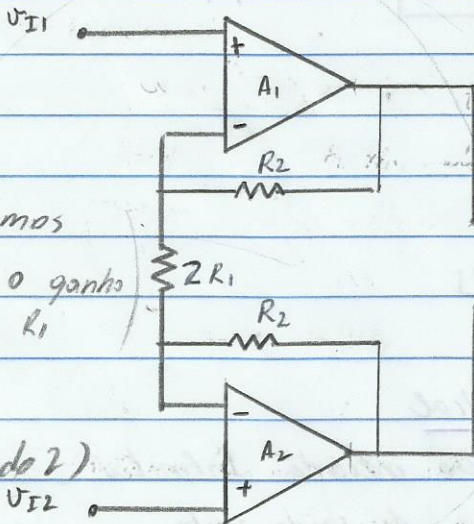
$$V_O = \frac{R_2}{R_1} (V_{I2} - V_{I1})$$

$V_{ID}$

ou  $V_O = \frac{R_4}{(R_3 + R_4)} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{I2} - \frac{R_2}{R_1} V_{I1}$

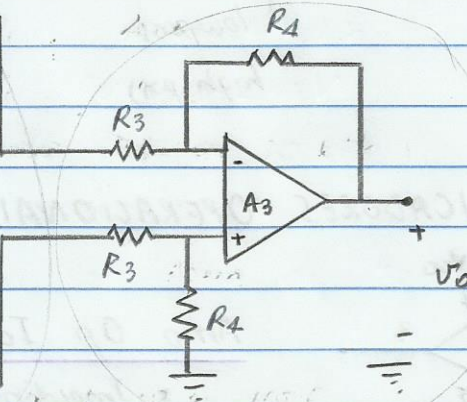
1º Estágio

(Eletrodo 1)



### Amplificador de Instrumentação

Podemos variar o ganho por R1



(Eletrodo 2)

(Eletrodo 3)

Ganho Unitário

2º Estágio

$$V_O = \frac{R_4}{R_3} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{ID} ; V_{ID} = (V_{I2} - V_{I1})$$

- Vantagens:
- Alta impedância de entrada
  - Alta razão de rejeição de modo comum
  - Elimina uma quantidade considerável de ruído em modo comum de 60Hz

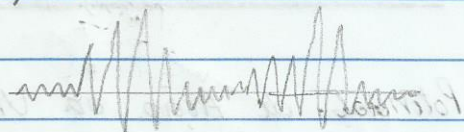
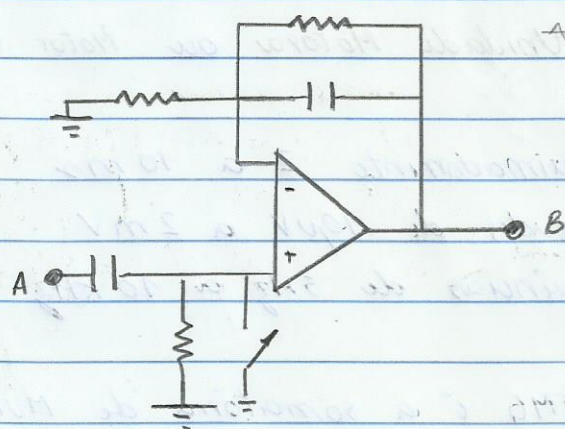
De acordo com Introdução à Mecatrônica e aos Sistemas de Medições por David G. Alciatore:

Motion Artifact: Ocorrência devido ao movimento relativo entre os eletrodos e o tecido

Essas Frequências são geralmente no limite inferior da largura de banda dos sinais de EMG.

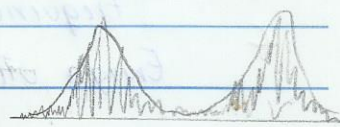
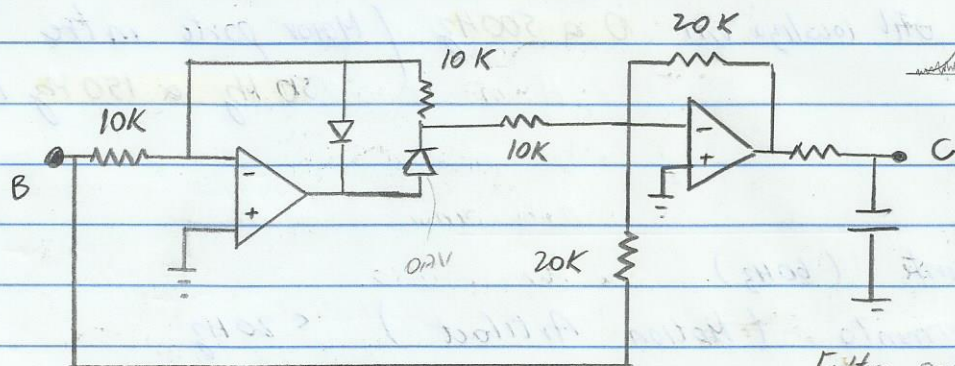
Um filtro passa-alta 2Hz pode resolver este problema (Alciatore e Hstrand, 2014)

Circuito Filtro = filtro RC e um Amp não-inversor.



(Temos um sinal de frequência entre  $\approx 0\text{Hz}$  e  $250\text{Hz}$ )

Para extrair o sinal entre 0V e sua amplitude máxima, é necessário um retificador e um filtro passa-baixa.



Filtro passa-baixa

# Controle de Dispositivos eletrônicos através de Contração Muscular

Tipos de Contração Muscular

- Voluntário: Gerado pelo Sistema Nervoso Central
- Involuntário: Ocorre nos movimentos reflexivos

"Contem explicação da geração do sinal mioelétrico"

## Características físicas do sinal Mioelétrico.

Potencial de Ação da Unidade Motora ou Motor Unit Action Potential (MUAP)

↳ É aproximadamente 2 a 10 ms com amplitudes de 10 $\mu$ V a 2 mV com frequências de 5 Hz a 10 kHz

Portanto, o sinal EMG é a somatória de MUAPs

EMG: Amplitude: 0 a 10 mV (pico a pico)

Frequência: 0 a 1 kHz (10 kHz para Intra Muscular)

Energia útil localizada em: 0 a 500 Hz (Maior parte entre 50 Hz a 150 Hz)

## Ruídos

- Ruído branco,
- Ruídos de ambiente (60 Hz)
- Ruído do Movimento (Motion Artifact) < 20 Hz
- Cross talk (Escolher tamanhos adequados de eletrodo)

# Amplificador para amplificação de Electrónica de

INA 121 (Imprimir Datasheet)

Filtros: (SENIAM - Hermens et al, 2000)

- Passa baixa:  $f_c = 500\text{Hz}$

- Passa alta:  $f_c < 10\text{Hz}$

DELSYS, 2001:

- Passa-banda: 20 - 500 Hz

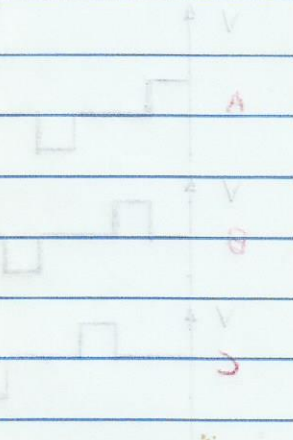
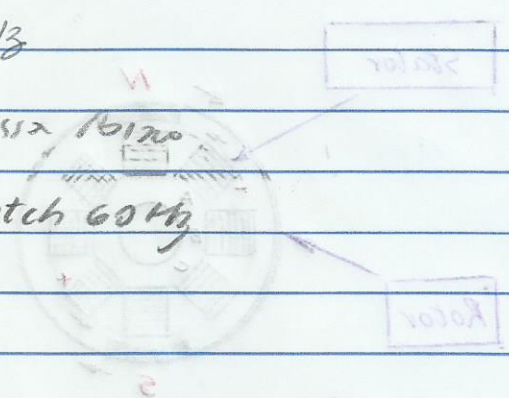
~~UAF42~~

UAF42

3x

Passa baixa

notch 60Hz



# Eletrônica de Potência

Motor de Corrente Contínua sem escovas (Brushless DC)

Potência: 1000 ou 1500 W

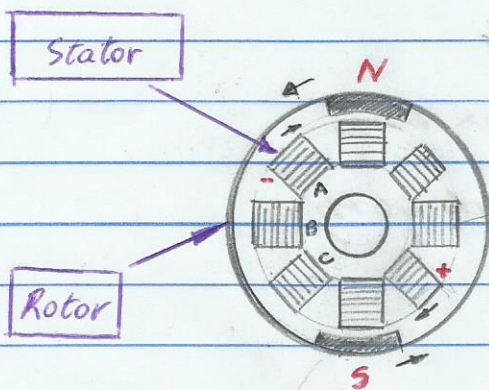
Tensão: 48 V

velocidade máxima (50 Km/h)

$$P = V \cdot I$$

Para  $P_{max} = 1500 \text{ W}$

$$\text{típos: } I_{max} = \underline{\underline{31,25 \text{ A}}}$$

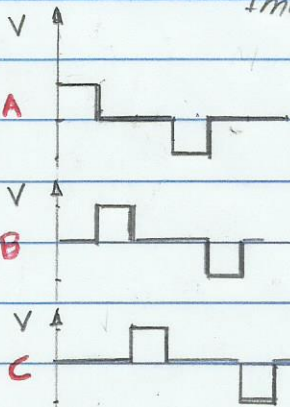


(Estator é fixo e o rotor rotaciona)

enrolamentos

Quando alimentado o par de enrolamentos, surge um campo magnético.

Ímã permanente

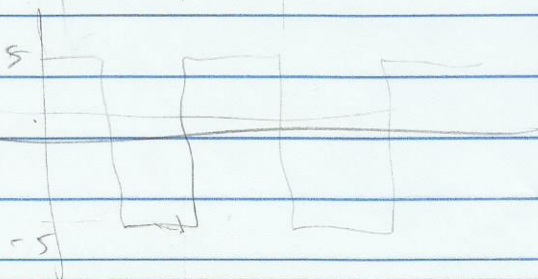


Comutação Magnética

Vantagens do Motor Brushless:

- x Maior eficiência
- x Mínimo desgaste (Expectativa de vida mais longa)
- x Ímã compacto
- x Motor densidade de energia
- x Menos ruído.

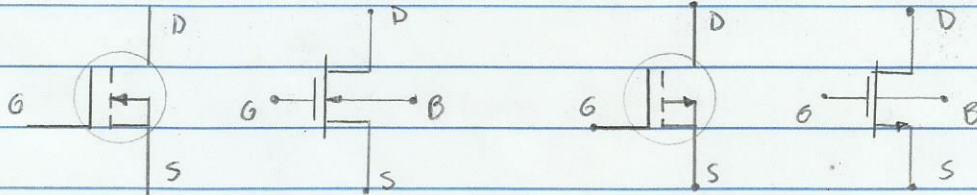
Duty cycle



Proposta:

- \* Controle PWM
- \* Ponte H usando Mosfet - Canal N

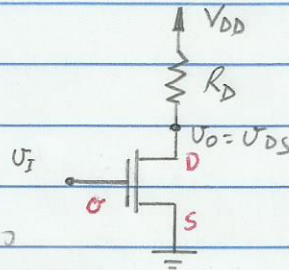
Revisão Mosfet (Transistor de Efeito de Campo metal-óxido-semicondutor)



Simbologia: (Mosfet - Canal N)

(Mosfet - Canal P)

MOSFET como chave



\* Tensão limiar ou tensão de threshold ( $V_T$ ) é a tensão mínima para criar um canal.

Região de saturação é usada como amplificador

Região de Corte:  $V_{GS} < V_T$

Região de Triodo:  $V_{GS} \geq V_T$   
(ou região limiar)  $V_{GS} - V_{DS} > V_T$

Regiões importante para usar MOSFET como chave.