Função de Transferência e Transformada Inversa

Em sistemas discretos no tempo a entrada $u(K)$ e a saída $y(K)$ são sequencias temporais passíveis de representação por meio da transformada Z. Para o caso linear a representação é do tipo.

$$y_n(K+n) + a_{n-1}\,y(K+n-1) + a_{n-2}\,y(K+n-2) + \dots + a_0\,y(K) =$$
$$= b_m\,u(K+m) + b_{m-1}\,u(K+m-1) + b_{m-2}\,u(K+m-2) + \dots + b_0\,u(K)$$

Aplicando a propriedade do avanço

$$z^n Y(z) - \sum_{K=0}^{n-1} y(K)z^{n-K} + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) - a_{n-1}\sum_{K=0}^{n-2} y(K)z^{n-1-K} + \dots + a_0 Y(z) = b_m z^m U(z) - b_m \sum_{K=0}^{m-1} u(K)z^{m-K} +$$
$$b_{m-1}z^{m-1}U(z) + \dots + b_0 U(z)$$

Para condições iniciais nula

$$\therefore\ (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)\,Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0)\,U(z)$$

A f.t. $G(z)$ é definida como a razão entre as transformadas Z da saída pela T.Z da entrada.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0} =$$

Assim como no domínio contínuo, os ptos do plano z que faz $G(z) \to \infty$ São chamados de polos e os ptos do plano z que faz $G(z) \to 0$ são chamados de zeros de $G(z)$

Transformada Z inversa

Há três formas para se obter a sequencia $f(K)$ a partir de uma função $F(z)$

- expansão em série por divisão contínua
- programa de computador
- expansão em frações parciais

Dado $F(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - 2{,}5z^2 + 2z - 0{,}5} = \dfrac{z^{-2}}{1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3}}$

Obter a seq $f(k)$.

Divição contínua

$$
\begin{array}{l|l}
z^{-2} & 1 - 2{,}5z^{-1} + 2z^{-2} - 0{,}5z^{-3} \\
\underline{-z^{-2} + 2{,}5z^{-3} - 2z^{-4} + 0{,}5z^{-5}} & -z^{-2} + 2{,}5z^{-3} + 4{,}25z^{-4} + 6{,}125z^{-5} + \dots \\
\quad 2{,}5z^{-3} - 2z^{-4} + 0{,}5z^{-5} & \\
\quad \underline{-2{,}5z^{-3} + 6{,}25z^{-4} - 5z^{-5} + 1{,}25z^{-6}} & \\
\qquad 4{,}25z^{-4} - 4{,}5z^{-5} - 1{,}25z^{-6} &
\end{array}
$$

$f(0) = 0$
$f(1) = 0$
$f(2) = 1$
$f(3) = 2{,}5$
$f(4) = 4{,}25$

Por expansão em frações parciais

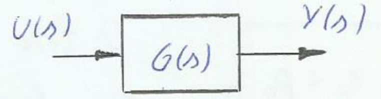
$F(z) = \dfrac{z}{(z-0{,}5)(z-1)^2} \Rightarrow \dfrac{F(z)}{z} = \dfrac{1}{(z-0{,}5)(z-1)^2}$

$\hookrightarrow \dfrac{F(z)}{z} = \dfrac{a_1}{(z-0{,}5)} + \dfrac{a_2}{(z-1)^2} + \dfrac{a_3}{(z-1)}$

$F(z) = \dfrac{4z}{(z-0{,}5)} + \dfrac{2z}{(z-1)^2} - \dfrac{4z}{z-1}$

$$\boxed{f(k) = 4\,(0{,}5)^k + 2k - 4}$$

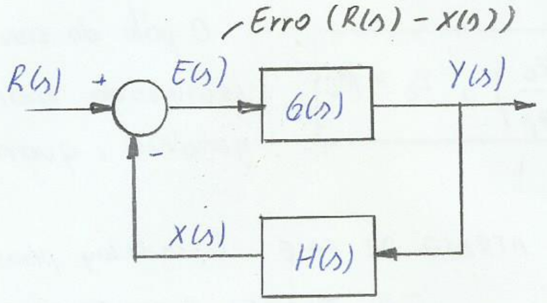
Função de Transferência



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- Função de Transferência é a razão da saída pela entrada
- Pólos: São as raízes do polinômio do denominador de G(s)
- Zeros: São as raízes do polinômio do numerador de G(s)

Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada



$$E(s) = R(s) - X(s)$$
$$= R(s) - H(s)X(s)$$

função de transferência em malha fechada

$$FTMF = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

LUGAR DAS RAÍZES

(Lugar Geométrico das Raízes - LGR)

O método do lugar geométrico das raízes consiste em um gráfico, construído apartir dos pólos e zeros do sistema em malha aberta. Este método permite visualizar de que forma os polos do sistema em malha fechada variam quando se altera o valor do ganho do sistema em malha aberta.

Compensação por meio do lugar das raízes

Projetar um compensador significa adicionar um bloco com pólos e zeros em cascata com a planta para modificar a resposta de um sistema para atender a determinadas especificações.

Compensação por AVANÇO DE FASE (phase Lead)

- Melhora a resposta temporal do sistema
- Reduz Sobressinal e o tempo de resposta transitória.

$$\boxed{G_c(s) = K_c\left(\frac{s+z_c}{s+p_c}\right),\ z_c < p_c}$$

O zero do compensador z_c deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao polo p_c.

Compensação por ATRASO DE FASE (Lag phase)

- Melhora o erro no estado estacionário
- Tende a piorar a resposta transitória

$$\boxed{G_c(s) = K_c\left(\frac{s+z_c}{s+z_p}\right),\ z_c > p_c}$$

O pólo do compensador p_c deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao zero z_c.

Compensação por AVANÇO E ATRASO DE FASE (Lead-lag phase)

- Melhora simultaneamente $\begin{cases} \text{a resposta transitória e} \\ \text{o erro no estado transitório} \end{cases}$

Procedimento:

1º Projeta-se um compensador por AVANÇO DE FASE
(Melhora a resposta transitória)

2º Calcula-se o erro estacionário que deve ser melhorado

3º Projeta-se o compensador por ATRASO DE FASE para satisfazer a especificação do erro estacionário.

EL9490 - Tópicos Especial em Controle I

Livro texto: Controle Automático, Costrucci

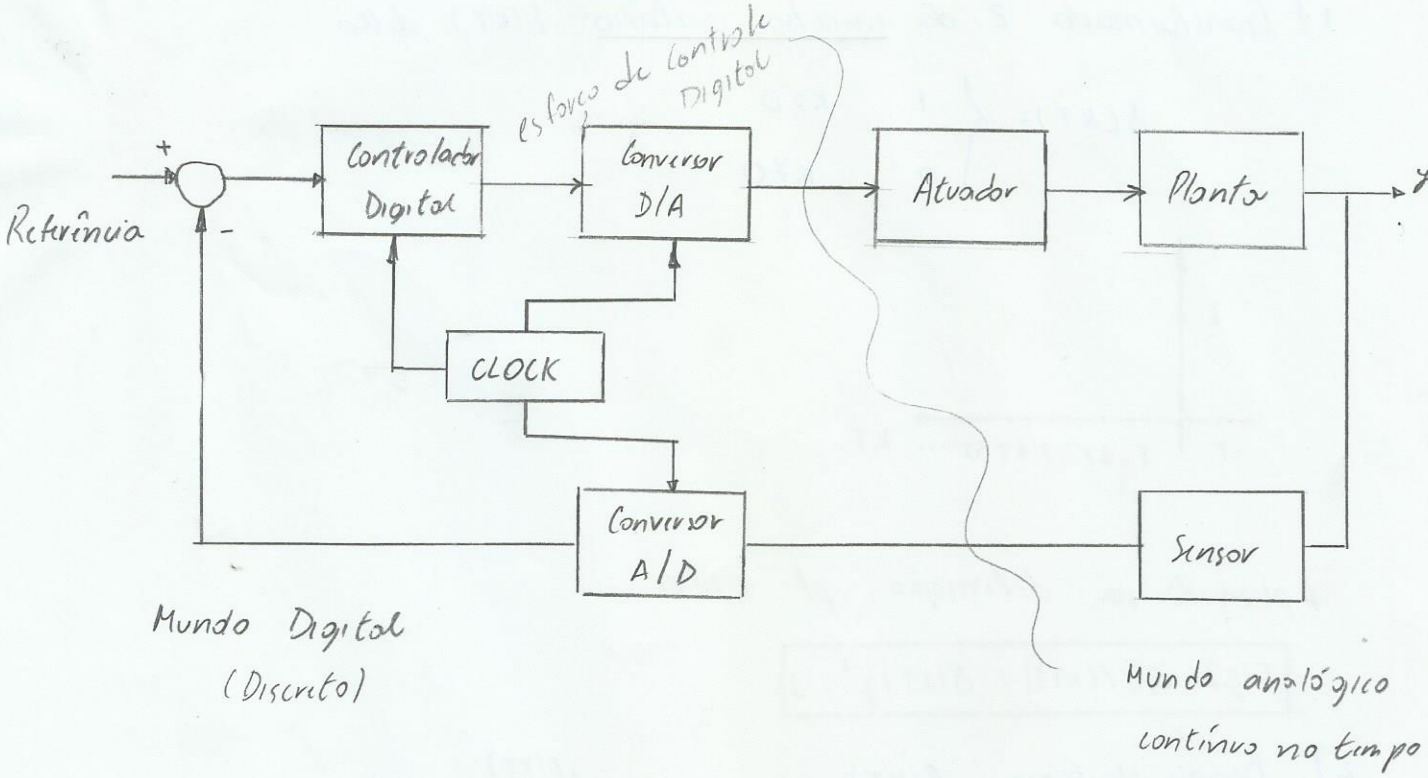
Cap $\left\{ \begin{matrix} 10 \\ 11 \end{matrix} \right\} P_1$

$12 \rightarrow P_2$

Média $0{,}4P_1 + 0{,}6P_2$

Prof: Silvio

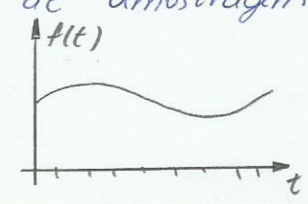
Assuntos:
- → Sistemas de controle discreto
- → Sistemas amostrados, conversores A/D e D/A, Transformada Z, Funções de transferência, Estabilidade
- → Aproximações discretas
- → Projeto de controladores discretos

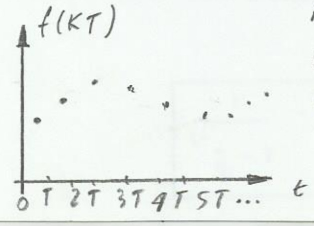


INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE TEMPOS DISCRETO

Os sistemas podem ser divididos em dois grupos:

- ~~Sistemas~~ Sinais contínuos no tempo, definidos p/ qualquer instante de tempo $f(t)$ $t \in \mathbb{R}$
- Sinais discretos no tempo ou amostrados, definidos apenas nos instantes de amostragem $f(KT)$, com $K = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$ e T sendo o período de amostragem. 1





Após discretizado o sinal pode ser convertido p/ digital com um certo número de bits.

$10\,bits \rightarrow 2^{10} = 1024$ ou $0{,}098\%$

$24\,bits \rightarrow 2^{24} = 16777216$ ou $0{,}000006\%$

TRANSFORMADA Z

É uma aplicação matemática que faz corresponder uma função na variável complexa z uma sequência de números.

A transformada Z é uma série de potências do tipo:

$$\boxed{F(z) = Z[f(t)] = Z[f(KT)] = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K}}$$

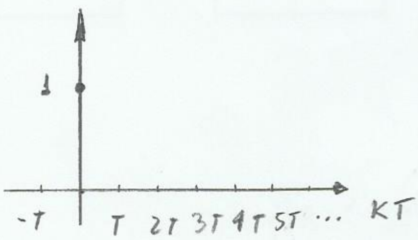
Existe uma tabela de Conversão, assim como Laplace Table.

sendo z uma variável complexa e $K \in N$ → T: Período de Amostragem

Exemplos:

1) Transformada Z do impulso unitário $\delta(KT)$ delta

$$\delta(KT) = \begin{cases} 1 & K=0 \\ 0 & K \neq 0 \end{cases}$$

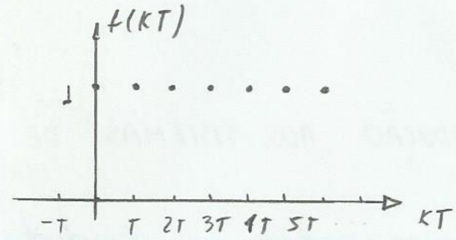


Aplicando a definição p/ $K \geq 0$

$$\boxed{F(z) = Z[f(KT)] = \delta(KT) z^{-K} = 1}$$

2) Degrau Unitário $f(KT)$

$$f(KT) = \begin{cases} 1 & K \geq 0 \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$



$$F(z) = Z[f(KT)] = f(K) z^{-K} =$$

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

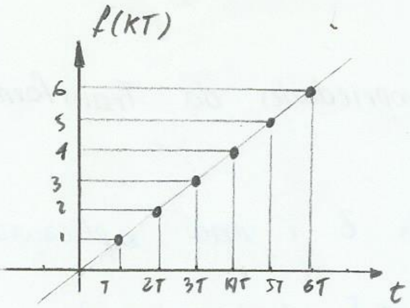
$$\begin{cases} F(z) = \cancel{1} + \cancel{z^{-1}} + \cancel{z^{-2}} + z^{-3} + \dots \\ z F(z) = z + \cancel{1} + \cancel{z^{-1}} + \cancel{z^{-2}} + \dots \end{cases}$$

$$F(z)(z-1) = z$$

$$\boxed{F(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}}$$

3) Rampa unitária

$$f(KT) = \begin{cases} KT & K \geq 0 \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$



$$F(z) = Z[f(t)] = Z[f(KT)] = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT)\, z^{-K}$$

$$F(z) = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \cdots$$

$$\begin{cases} F(z) = T\left(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots\right) \\ zF(z) = T\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + \cdots\right) \end{cases}$$

$$F(z)(z-1) = T\underbrace{\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots\right)}_{\left(\frac{z}{z-1}\right)}$$

$$F(z)(z-1) = T \cdot \left(\frac{z}{z-1}\right) \qquad \therefore \qquad \boxed{F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}}$$

Obter a transformada Z da função: $F(s) = \dfrac{a}{s(s+a)}$

$$F(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+a)}$$

$$K_1 = \left.\frac{a}{s+a}\right|_{s \to 0} = 1 \qquad F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$K_2 = \left.\frac{a}{s}\right|_{s \to -a} = -1 \qquad \text{logo,} \quad \boxed{f(t) = 1 - e^{-at} \quad p/\ t > 0}$$

$$F(z) = Z[f(t)] = Z[1] - Z[e^{-at}]$$

$$\boxed{F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-at}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{F(z) = \frac{(1-e^{-at})}{(z-1)(z-e^{-at})}}$$

25/02/2016

Propriedades da Transformada Z

A transformada Z é uma aplicação linear. Considere α e $\beta \in \mathbb{R}$

$$Z[\alpha f(k) + \beta g(k)] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha f(k) + \beta g(k)) z^{-k} =$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}$$

$$\alpha F(z) + \beta G(z)$$

Atraso $\Rightarrow$ Considere a sequencia $f(k)$ e $g(k)$, porém $g(k)$ obtido por translação $f(k)$ para depois, isto é:

$$g(k) = \begin{cases} f(k-n) & k \geq n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

Então,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) z^{-k}$$

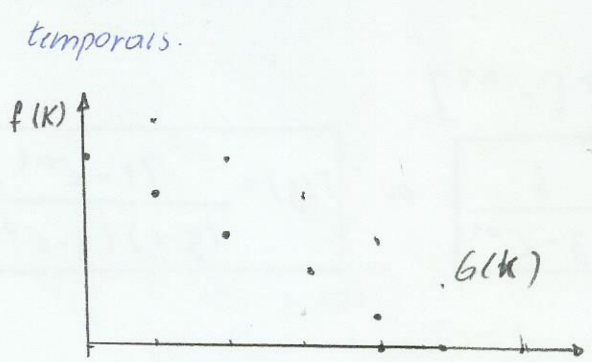
Definindo $m = k-n$ e dado que $g(k) = 0$ para $k < n$, obtém-se:

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-(m+n)} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} = z^{-n} F(z)$$

Portanto,

$$G(z) = z^{-n} F(z)$$

Assim a variável z^{-n} funciona como um operador de atraso n, aplicável as sequências temporais.



Avanço: Considere a sequência $f(K)$ e $\hat{h}(K)$ obtida por translação de $f(n)$ para antes, isto é:

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} f(K+n) & K \geq -n \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$

Note que deve-se truncar $\hat{h}(K)$, encontrando um $h(K)$ truncado.

$$\to h(K) = \begin{cases} f(K+n) & K \geq 0 \\ 0 & K < 0 \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{K=0}^{\infty} h(k) z^{-K} = \sum_{K=0}^{\infty} f(K+n) z^{-K}$$

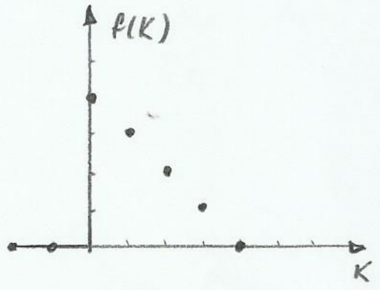
Sendo $m = K+n$

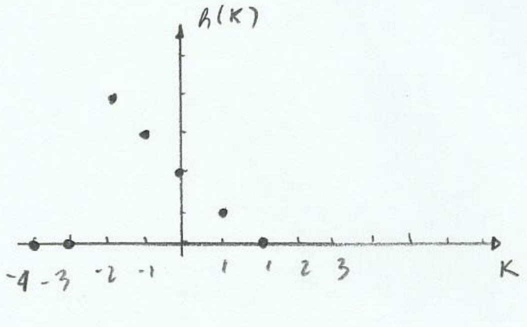
$$H(z) = \sum_{m=n}^{\infty} f(m) z^{-(m-n)} = z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right)$$

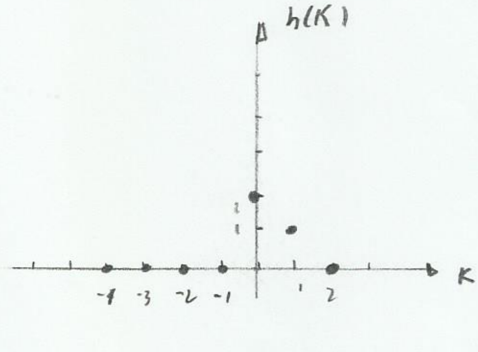
Portanto,

$$\boxed{H(z) = z^n \left(F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right)}$$

A variável z^n funciona como um operador de avanço aplicável as sequencias temporais com o devido truncamento.







EXEMPLO 10.3 Considere $f(K) = K$ e $h(K) = K+2$, então

$$F(z) = Z[f(K)] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

A função $h(K)$ está avançando $f(K)$ em 2. Usando a expressão de avanço:

$$H(z) = z^n \left(F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(m) z^{-m} \right) \quad ; m = K+n$$

Sendo: $n = 2$, temos $\quad m = K + n = 0$

$$H(z) = z^2 \left(\frac{z}{(z-1)^2} - \sum_{m=0}^{1} K z^{-m} \right)$$

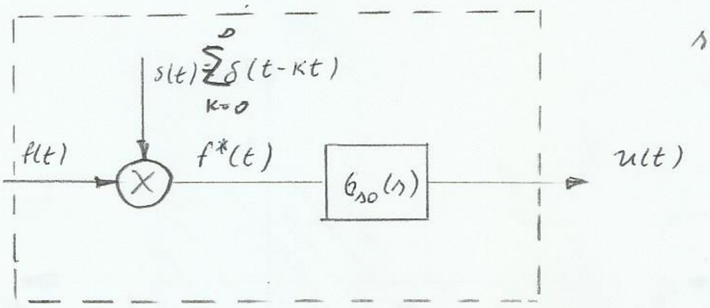
$$= z^2 \left(\frac{z}{(z-1)^2} - \right.$$

Mapeamento "plano s" e "plano z"

Considere um <u>conversor A/D</u> ideal

$G_{s0}(s)$: Conversão dos impulsos

$s(t)$: trem de impulso



$$f^*(t) = f(t) \times s(t) = f(t) \times \sum_{K=0}^{\infty} \delta(t-Kt)$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} f(KT)\,\delta(t-Kt)$$

$$f^*(t) = \begin{cases} \neq 0 & \text{se } t = Kt \\ 0 & \text{se } Kt < t < (K+1)T \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT)\,\mathcal{L}[\delta(t-KT)] = \boxed{\sum_{K=0}^{\infty} f(KT)\,e^{-KTs}}$$

z

Definindo, $z = e^{Ts}$, temos

$$F^*(s)\Big|_{z=e^{Ts}} \quad F^*(s) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT)\,z^{-K}$$

Este é um procedimento alternativo para obtenção da transformada Z.

Vejamos as relações geométricas decorrentes da troca de variável s para z.

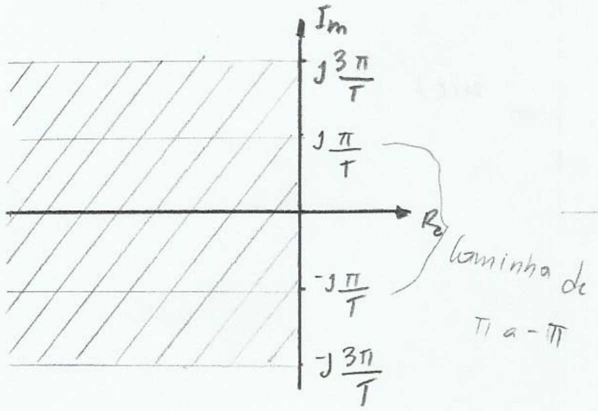
$\boxed{s = \sigma + j\omega}$ $\quad \sigma$ e $\omega \in \mathbb{R}$

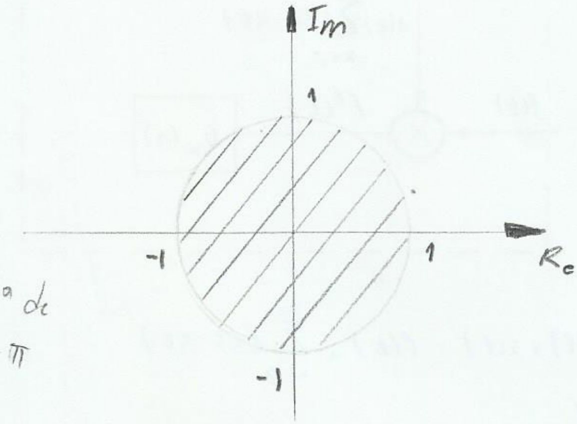
Logo, $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} * e^{j\omega T}$ $\qquad |z| = e^{\sigma T}$

$\qquad \underline{\angle z} = e^{j\omega T}$

• fazendo ($\sigma = 0$), e caminhando sobre o eixo $j\omega$ do "plano s", corresponde no "plano z" à circunferência de raio unitário. $e^0 = 1 \therefore |z| = 1$

• note que todo o semiplano esquerdo do "plano s" fica confinado dentro do círculo unitário

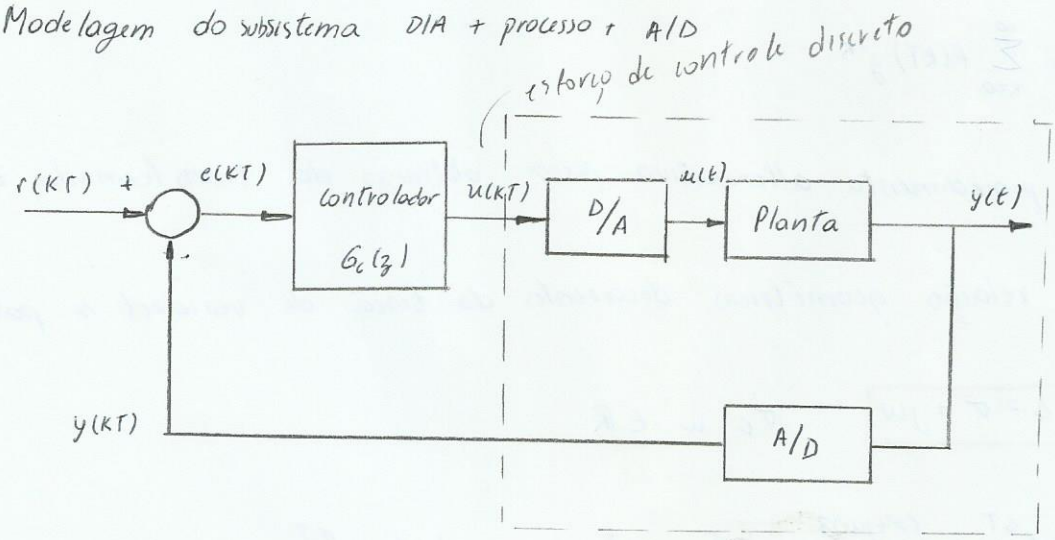




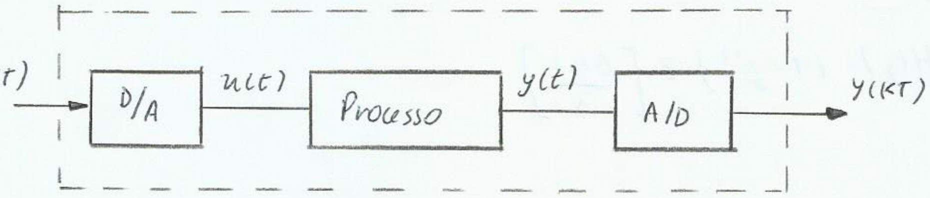
- Para construir o controlador, os limites de estabilidade dos polos fica dentro do círculo. Logo tenho polo fora → instável. Sobre a linha de circunferência é marginalmente estável

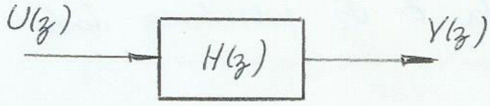
- Os valores de Tp, Tac, etc no plano z não existe. Na verdade você não consegue obter esses valores.

Modelagem do subsistema D/A + processo + A/D



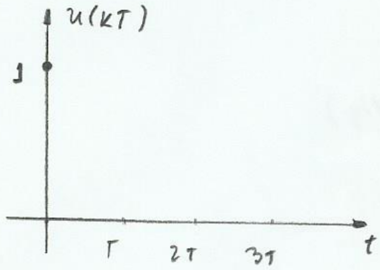
No projeto de controladores digitais é conveniente representar o subsistema D/A + planta + A/D por meio da transformada Z.

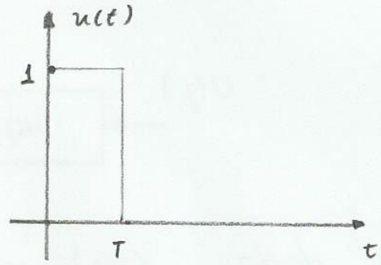




A ideia é obter a função $H(z)$ por meio da resposta ao impulso unitário

A saída do D/A para um impulso é um pulso





A transformada de Laplace de $u(t)$:

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$) Segurador de ordem 0

Portanto, a saída do processo:

$$\therefore \; Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\,\frac{(1 - e^{-sT})}{s}$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)\,e^{-sT}}{s} \longrightarrow \boxed{Y(s) = \frac{G(s)}{s}(1 - e^{-sT})}$$

A transformada Z de $Y(s)$:

$$Y(z) = Z[Y(s)] = Z\left[\frac{G(s)}{s}(1 - e^{-sT})\right]$$; lembrando que $Z[e^{-sT}] = z^{-1}$

Portanto, $Y(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$

Para $U(z) = 1$ (impulso unitário)

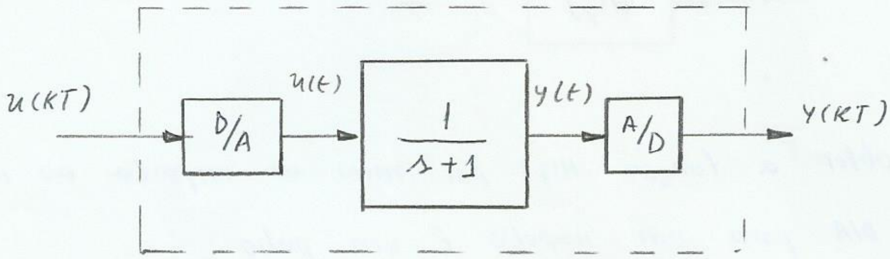
Portanto, para calcular $H(z)$ do subsistema D/A + processo + A/D basta calcular:

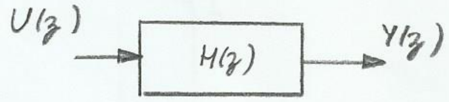
- $Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$ onde $G(s)$ é a função de transferência do processo

$$H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Exemplo:

Obter a transformada Z do subsistema dado:





No sistema dado $G(s) = \frac{1}{s+1}$

logo, $H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$

$$= (1 - z^{-1}\, Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

Sabendo que $Z\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{z}{z-1}$ e $Z\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{z}{z - e^{-T}}$

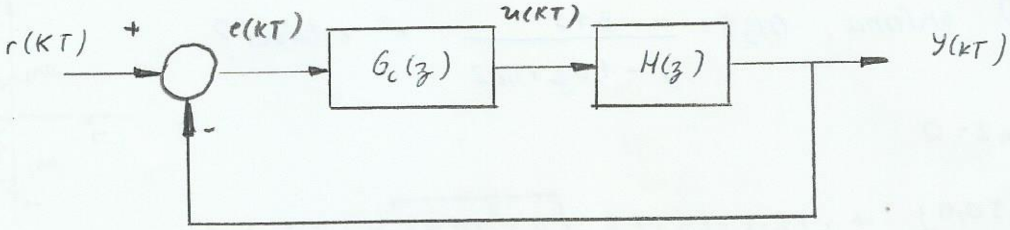
Portanto, $H(z) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right)$

$$\boxed{H(z) = \frac{1 - e^{-T}}{(z - e^{-T})}}$$

Essa é a função equivalente ao subsistema D/A + processo + A/D no domínio z.

Análise de Malha Fechada

Considere o sistema representado por sua função equivalente $H(z)$



$R(z) = Z[r(KT)]$

$Y(z) = Z[y(KT)]$

a função de transferência de malha fechada resulta.

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)H(z)}{1 + G_c(z)H(z)}}$$

O controlador é genericamente representado por:

$b_0, b_1, \dots b_p$, $a_0, \dots, a_{q-1}$ } Constantes com $p \leq q$

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \qquad G_c(z) = \frac{b_p z^{-q+p} + b_{p-1} z^{-q+p-1} + \dots + b_0 z^{-q}}{1 + a_{q-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-q}}$$

} Polinomio Normalizado

Conhecendo-se $r(KT)$, os calculos de $e(KT)$ e $u(KT)$ podem ser implementados em um algoritmo de "computador"

$$e(KT) = r(KT) - y(KT)$$

$$u(KT) = -a_{q-1} u[(K-1)T] - \dots - a_0 u[(K-q)T] + b_p e[(K-q+p)T] + b_{p-1} e[(K-q+p-1)T] + \dots + b_0 e[(K-q)T]$$

} Controlador no "computador"

Estabilidade: Um sistema possui a propriedade de estabilidade externa se toda sequência de entrada de amplitude limitada apresentar uma sequência de saída também com amplitude limitada.

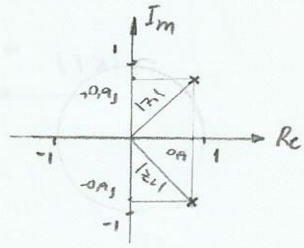
Um Sistema linear, discreto e invariante no tempo (SLDIT) é estável se e somente se todos os polos de m.f. do mesmo estiverem estritamente dentro do círculo unitário.

Exemplo: 11.4) O sistema com $G(z) = \dfrac{z}{z-1}$ é estável?

$z - 1 = 0 \therefore z = 1$

Portanto, marginalmente estável

Exemplo 11.5) O sistema $G(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 1{,}8z + 1{,}62}$ é estável?



$z^2 - 1{,}8z + 1{,}62 = 0$

$z = 0{,}9 \pm 0{,}9j \rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}9^2} \cong 1{,}27 > 1$

O sistema é instável pois os pólos estão localizados fora do círculo unitário.

Critério de Jury

Considere a função de transferência de malha fechada

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots a_{n-1} z + a_n} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

O critério de estabilidade de Jury é aplicado a sistemas discretos e permite determinar se $G(z)$ é estável sem precisar calcular as raízes do polinômio $D(z)$. (Veja tabela no Moodle)

Critério:

1) $|a_n| < a_0$

2) $D(z)|_{z=1} > 0$

3) $D(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } n \text{ par} \\ < 0 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$

4) $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

$\vdots$

$|q_2| > |q_0|$

Exercício 11.2

Verificar se $G(z)$ é estável: $G(z) = \dfrac{z-0,2}{z^3+2,1z^2+2,08z+0,64}$

$D(z) = z^3 + 2,1z^2 + 2,08z + 0,64$ $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2,1 \\ a_2 = 2,08 \\ a_3 = 0,64 \end{cases}$

Sabendo que $n = 3$

1) $|a_n| < a_0$? $\rightarrow$ $a_3 < a_0$

$0,64 < 1$ ✓

2) $D(z)|_{z=1} > 0$? $D(z)|_{z=1} = 6,54 > 0$ ✓

3) $D(z)|_{z=-1} \begin{cases} >0 & n \text{ par} \\ <0 & n \text{ ímpar} \end{cases}$ $D(z)|_{z=-1} = -0,34 < 0$ ✓

4)

	Linha	z^0	z^1	z^2	z^3
a	1	0,64	2,08	2,1	1
	2	1	2,1	2,08	0,64
b	3	-0,5904	-0,7688	-0,737	
	4	-0,737	-0,7688	-0,5904	
c	5	-0,892	-0,113		
	6	-0,113	-0,892		
	7	-0,808			

$|b_2| > |b_0|$ ✗

$|c_1| > |c_0|$ ✓

Portanto, o sistema é instável pois $|b_2| < |b_0|$

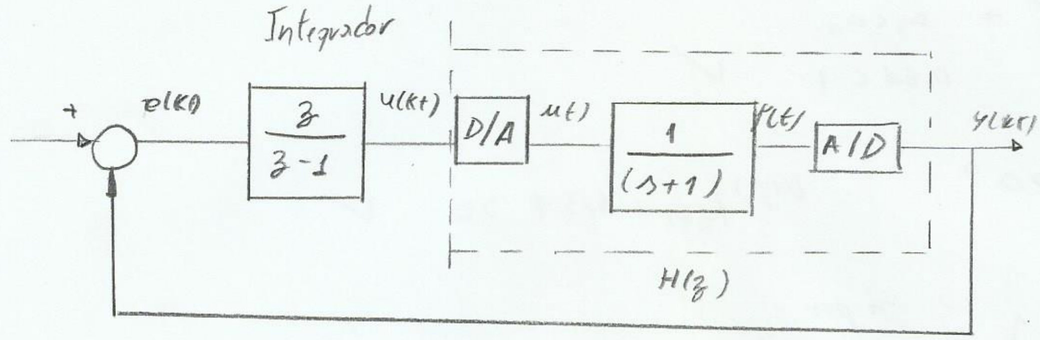
Exercício Resolvido 11.1

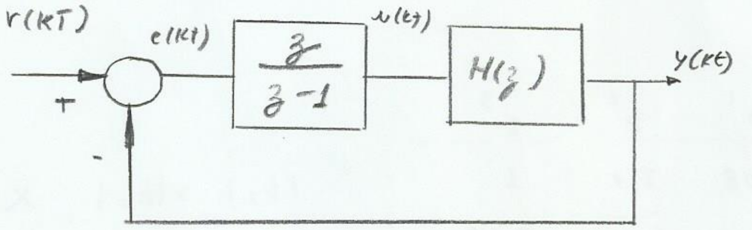
Para o sistema indicado p/ $T=0,1s$ Pede

a) f. tr. de m.f

b) A resp $y(0) \ldots y(1.0)$ qdo $r(kT)$ for um degrau unitário

c) O erro de regime estacionário quando $r(kT)$ for um degrau unitário





(a) $$H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$\therefore H(z) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)}{1 + \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z(1-e^{-T})}{z^2 - 2ze^{-T} + e^{-T}}$$

p/ $T=0,1s$

a) $$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,0952\, z}{z^2 - 1,8097z + 0,9048}$$

(b) $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{0{,}0952z}{z^2 - 1{,}8097z + 0{,}9048} = \dfrac{0{,}0952z^{-1}}{1 - 1{,}8097z^{-1} + 0{,}9048z^{-2}}$

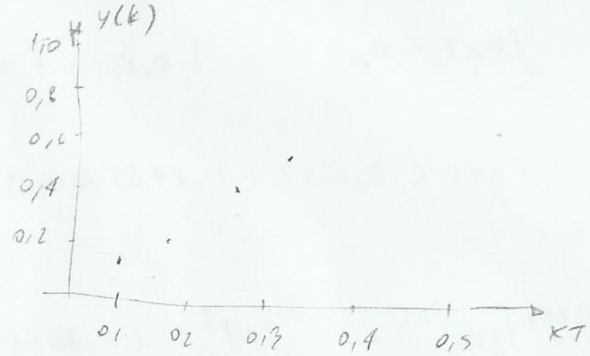
$\therefore$ $\boxed{y(KT) = 1{,}8097\,y[(K-1)T] - 0{,}9048\,y[(K-2)T] + 0{,}0952\,r[(K-1)T]}$

$y(0) = 0$
$y(0{,}1) = 0{,}0952$
$y(0{,}2) = 0{,}2675$
$y(0{,}3) = 0{,}4531$

(c) $y(\infty) = \lim_{K \to \infty} y(KT) = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1})\overbrace{G(z)R(z)}^{Y(z)}$

$$y(\infty) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z}\right)\underbrace{\left(\frac{0{,}0952z}{z^2 - 1{,}8097z + 0{,}9048}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)}_{Y(z)}$$

$y(\infty) = 1{,}0$

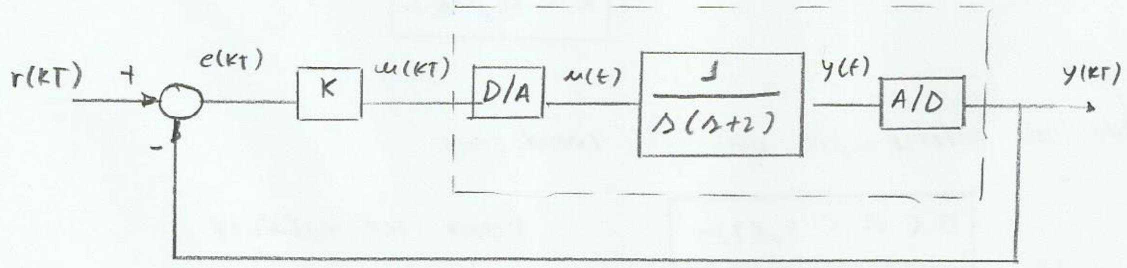


$e(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$

$e(\infty) =$ nulo

Exercício Resolvido 11.4

Determinar a faixa de valores de K p/ qual o sistema é estável



$$H(z) = (1-z^{-1})\,Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] : Z\left[\frac{1}{4}\,\frac{2^2}{s^2(s+2)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{(aT-1+e^{-aT})z^2 + (1-e^{-aT} - aTe^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{0{,}2838\,z + 0{,}1485}{z^2 - 1{,}1353\,z + 0{,}1353}}$$

$$G(z) = \frac{K H(z)}{1 + K H(z)} = \frac{(0{,}2838\,z + 0{,}1485)K}{z^2 + (0{,}2838K - 1{,}1353)z + 0{,}1353 + 0{,}1485K}$$

$$D(z) = \underset{a_0}{1} z^2 + \underbrace{(0{,}2838K - 1{,}1353)}_{a_1} z + \underbrace{0{,}1353 + 0{,}1485K}_{a_2}$$

Critérios de Jury

1) $|a_n| < a_0$ $\qquad |0{,}1353 + 0{,}1485K| < 1$

$$-1 < 0{,}1353 + 0{,}1485K < 1 \quad \therefore \quad \boxed{-7{,}6451 < K < 5{,}8229}$$

2) $D(z)\big|_{z=1} > 0$ $\qquad (1)^2 + (0{,}2838K - 1{,}1353)\times(1) + 0{,}1353 + 0{,}1485\times K > 0$

$$\boxed{K > 0}$$

3) $D(z)\big|_{z=-1} > 0$ $\qquad (-1)^2 + (0{,}2838K - 1{,}1353)\times(-1) + 0{,}1353 + 0{,}1485K > 0$

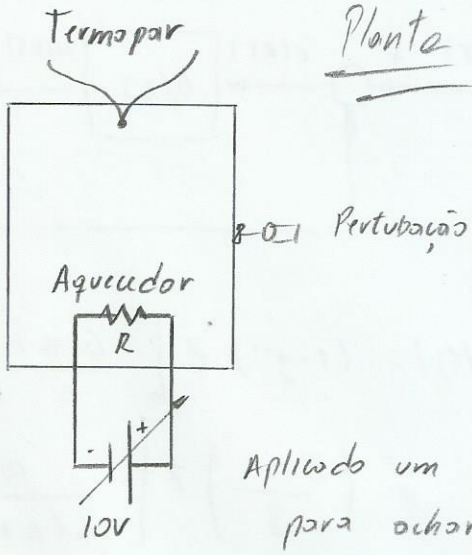
$$\boxed{K < 16{,}782}$$

Fazindo as interseções das 3 condições

$$\boxed{0 < K < 5{,}8229} \quad \text{Para ser estável}$$

O levantamento da curva de aquecimento de uma pequena estufa p/ um degrau de 10V está mostrado na tabela a seguir

Tempo (s)	Temperatura (°C)
0	24,50
20	26,00
40	27,20
60	28,30
80	29,00
100	29,50
120	30,00
140	30,20
160	31,00
180	31,30
200	31,90
220	31,90
240	31,7
260	32,10
280	32,40
300	32,90
320	33,10
340	33,20
360	33,00
380	33,00

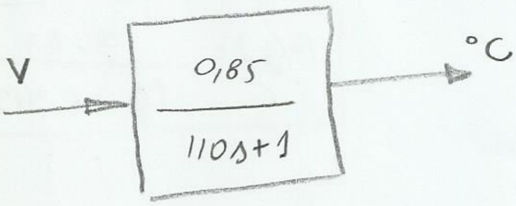


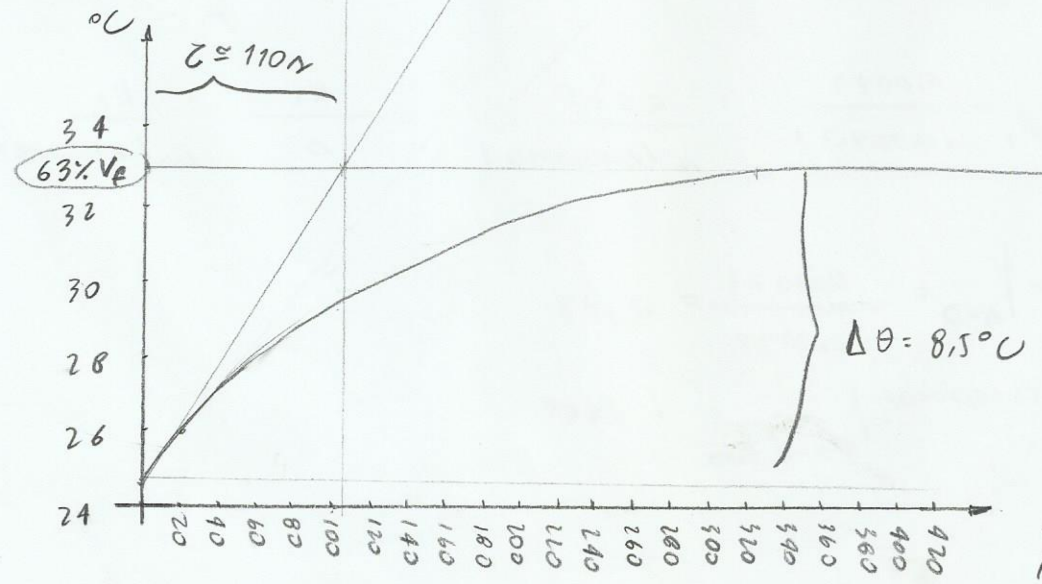
Aplicado um $\sqcap$ de 10V para achar f.t.

Pede-se:

a) Obter a f.t. no domínio s

b) Obter a f.t. discreta $H(z)$



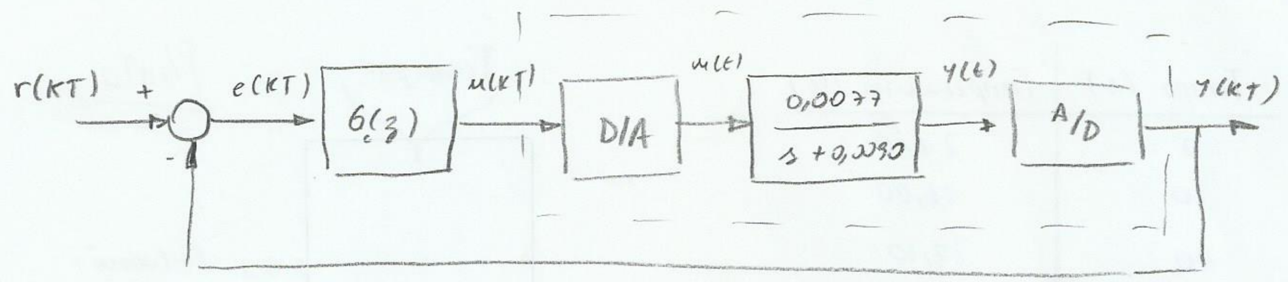


$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad K = \frac{8{,}5\,°C}{10\,V} = 0{,}85\,°C/V$$

Função de Transferência

$$\boxed{G(s) = \frac{0{,}85}{110s+1} = \frac{0{,}0077}{s + 0{,}0090}}$$

Sistema tipo 0 { Tem erro do estado estacionário



$$H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{0{,}0077}{s(s+0{,}0090)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{0{,}0077}{0{,}0090} \times \frac{0{,}0090}{s(s+0{,}0090)}\right] \; ; a = 0{,}009$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) \times 1{,}176 \, \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} \quad , \; p/\; T = 10s$$

(Tem que identificar saída discreta erro discreto etc..)

(O prof. apenas pegou a menor resolução /2)

$$\boxed{H(z) = \frac{0{,}087}{(z-0{,}913)}}$$

— " —

$$\frac{10}{s} \times \frac{0{,}0077}{(s+0{,}0090)} = \frac{0{,}077}{s(s+0{,}0090)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+0{,}0090)}$$

$$K_1 = G(s)s \Big|_{s=0} = \frac{0{,}0077}{0{,}0090} = 0{,}85$$

$$K_2 = G(s)(s+0{,}0090) \Big|_{s \to -0{,}0090} = -0{,}85$$

Projeto de Controladores Digitais

A principal vantagem de um controlador discreto (digital) sobre um controlador contínuo é a sua flexibilidade de implantação. Por serem feitos através de programas, permitem implementar qualquer tipo de controlador (lei de controle) além de possibilitar alterações de forma fácil.

O projeto de controladores digitais pode ser feito de duas formas:

1- Aproximações discretas de projetos feitos no domínio da frequência (Laplace)

2- diretamente no domínio discreto por meio da transformada Z ~~de Laplace~~

Aproximações discretas

Há vários métodos de aproximações discretas que permitem obter funções discretas a partir de funções contínuas.

Pode-se citar as aproximações:

- → Retangular para frente
- → Retangular para trás
- → Bilenear ou (Tustin)
- → Mapeamento polo-zero

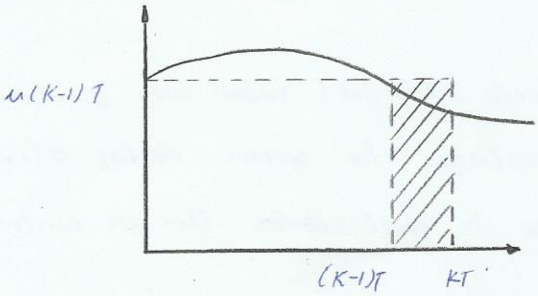
Considere que se quer aproximar a função integral

$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s}$ A eq dif. correspondente é $\dfrac{dy(t)}{dt} = u(t)$

Integrando ambos os membros no intervalo de $(K-1)T$ a KT, ou seja:

$$y(KT) - y(K-1)T = \int_{(K-1)T}^{KT} u(t)\,dt$$

a) Retangular p/ frente



O método aproxima o cálculo da integral pela área de um retângulo de altura $u(K-1)T$ e base T.

$$y(KT) - y(K-1)T = T.\,u[(K-1)T]$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = T\,z^{-1}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T\,z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{z-1} = \frac{1}{\frac{z-1}{T}}$$

∴ A f.t. discreta é obtida por simples substituição de s por $\frac{z-1}{T}$

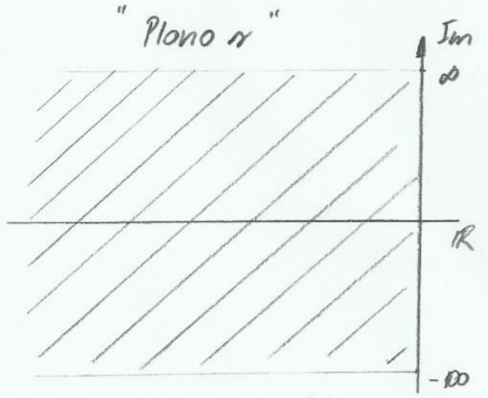
$$s = \frac{z-1}{T}$$

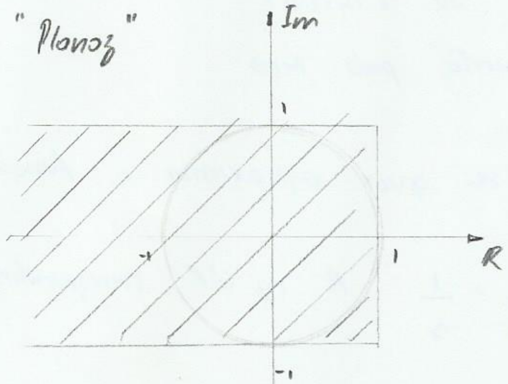
Para que o sistema seja estável, os polos devem estar no SPE do "plano s"

$\mathbb{R}(s) < 0 \qquad \mathbb{R}\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0$

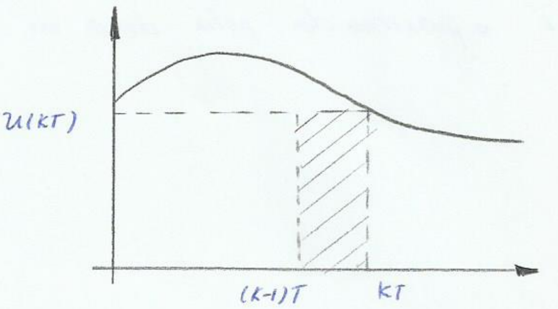
Para $T > 0 \qquad \mathbb{R}(z) < 1$

Assim, polos do SPE do "plano s" podem ser mapeados fora do círculo unitário no "plano z"





b) Retangular p/ trás



Este método aproxima a integral pela área de um retângulo de altura u(KT).

$$y(KT) - y(K-1)T = T\,u(KT)$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = T\,U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{1-z^{-1}} = \frac{1}{\frac{z-1}{T.z}}$$

∴ A f.t. discreta é obtida por simples substituição de s por $\frac{z-1}{T.z}$, ou seja:

$$s = \frac{z-1}{T.z}$$

Em relação a estabilidade:

$$\mathbb{R}(s) < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0$$

Para $T>0$ com $z = \sigma + jw$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\sigma + jw - 1}{T\underbrace{z}_{(\sigma+jw)}}\right) < 0$$

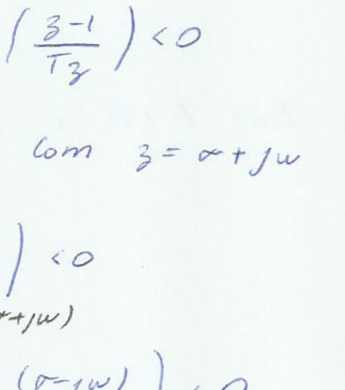
$$\mathbb{R}\left(\frac{(\sigma + jw - 1)}{\sigma + jw}\cdot\frac{(\sigma - jw)}{(\sigma - jw)}\right) < 0$$

$$\mathbb{R}\left[\frac{\sigma^2 - \sigma + w^2 + jw}{\sigma^2 + w^2}\right] < 0$$

$$\sigma^2 - \sigma + w^2 < 0$$

$$(\sigma - 0{,}5)^2 + w^2 < 0{,}25$$

Essa transformação mapeia todo SPE do "plano s" dentro de um círculo de raio = 0,5 e centro em 0,5

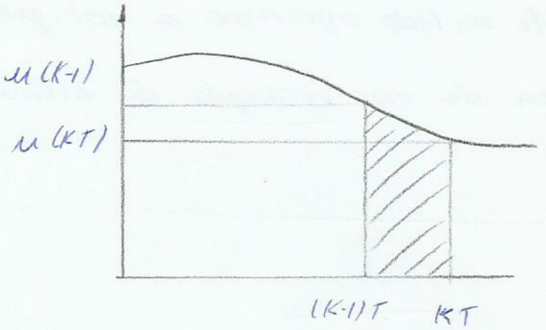


"Plano s"

"Plano z"

c) Bilinear ou Tustin

Neste método o cálculo da integral é aproximada pela área de um trapézio.



$$y(KT) - y(K-1)T = T.\left(\frac{u(KT) + u(K-1)T}{2}\right)$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = T\left(\frac{U(z) + z^{-1}U(z)}{2}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T.(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} = \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}}$$

∴ a f.t. pode ser obtida por substituição de s por $\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}$

ou seja $s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}$

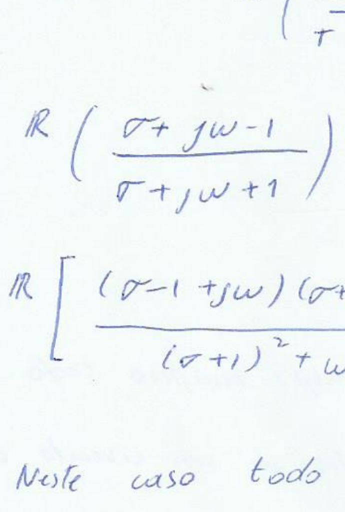
Em relação a estabilidade

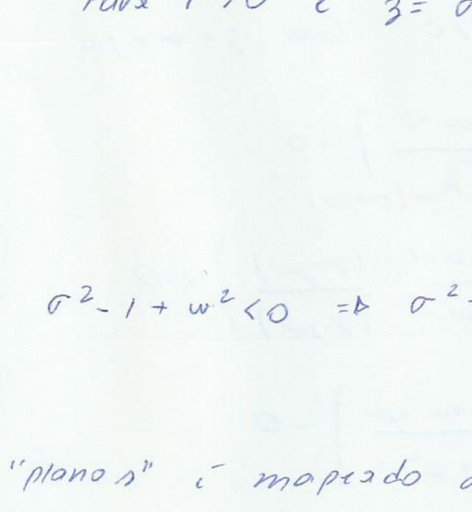
$\mathbb{R}(s) < 0 \quad \mathbb{R}\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right) < 0$ Para $T > 0$ e $z = \sigma + j\omega$

$$\mathbb{R}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) < 0$$

$$\mathbb{R}\left[\frac{(\sigma - 1 + j\omega)(\sigma + 1 - j\omega)}{(\sigma+1)^2 + \omega^2}\right] \qquad \sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 \Rightarrow \sigma^2 + \omega^2 < 1$$

Neste caso todo SPE do "plano s" é mapeado dentro do círculo unitário.





d) Mapeamento polo-zero

Este método consiste em mapear polos e zeros da função $G(s)$ no plano z, por meio da relação $z = e^{sT}$. Primeiro é necessário fatorar $G(s)$

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Um polo p_n do plano $s = p_n$ é mapeado no plano z usando a forma

$$z_n = e^{p_n T}$$

Um zero $s = z_m$ é mapeado no plano z usando a forma: $z = e^{z_m T}$

Quando $m < n$, que é o caso geral, $G(s)$ possui zeros no infinito que são mapeados em $z = -1$.

Lembrar que quando um ponto varia de 0 a π/T no plano s, o mesmo varia de $(z = e^{j0} = 1)$ até $(z = e^{j\pi} = -1)$ no plano z, ou seja, $z = -1$ representa a maior freq. possível da f.t. discreta.

Para compensar esse efeito acrescenta-se $(n-m-1)$ fatores $(z+1)$ no numerador da f.t. discreta $G(z)$.

Finalmente, é necessário ajustar o ganho da função discreta $G(z)$. Esse ganho é ajustado normalmente p/ freq $\to 0$

$$G(s)\big|_{s=0} = G(z)\big|_{z=1}$$

Example: 12.2 Dado $G(s) = \frac{2}{s+2}$, obter a f.t. discreta p/ $T = 1s$

O polo em -2 é mapeado em: $z = e^{-2T} = e^{-2} = 0{,}1353$

$n = 1$; $m = 0$ $(n-m-1) = 0$ não há necessidade de acrescentar zeros em -1 em $G(z)$

Ganho $G(s)\big|_{s=0} = K = \frac{2}{2} = 1$

$$G(s)\Big|_{s=0} = G(z)\Big|_{z=1} \Rightarrow 1 = \frac{K}{z-0,1353}\Big|_{z=1} \quad \therefore \quad K = 0,8647$$

$$\therefore G(z) = \frac{0,8647}{z-0,135}$$

Exemplo 12.3

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}, \quad T = 1s$$

pólos: $z_1 = e^{-2T}$, $z_2 = e^{-3T}$, $z_3 = e^{-4T}$

$n=3$, $m=1$ $\Rightarrow$ $(n-m-1)=1$, deve-se acrescentar um fator $(z+1)$ ao numerador de $G(z)$

zero $\Rightarrow$ $z = e^{-T}$

$$\therefore G(z) = \frac{K(z+1)(z-e^{-T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})(z-e^{-4T})}$$

$$G(z) = \frac{K(z+1)(z-0,3679)}{(z-0,1353)(z-0,0498)(z-0,01833)}$$

$$G(s)\Big|_{s=0} = \frac{2}{24}$$

$$G(z)\Big|_{z=1} = \frac{2}{24} \Rightarrow \frac{2}{24} = \frac{K(z+1)(z-0,3679)}{(z-0,1353)(z-0,0498)(z-0,01833)}$$

$\therefore$ $K \cong 0,0532$

$$G(z) = \frac{0,0532(z+1)(z-0,3679)}{(z-0,1353)(z-0,0498)(z-0,01833)}$$

Projeto de Controladores Digitais

Controlador Digital vs Controlador Contínuo

Principal vantagem é a flexibilidade de implementação, pois o contínuo é implementado através de componentes, enquanto o digital é a partir de programas e DSPs.

Aproximações de Tempo Discreto:
- Retangular para a frente
- Retangular para trás
- Transformação bilinear ou método de Austin
- Transformação bilinear com compensação de prewarping
- Mapeamento polo-zero

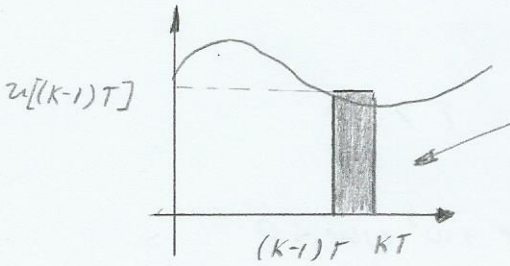
Para um integrador: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$; Sabendo que a equação diferencial que representa esta função de transferência é : $\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$.

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

$$\int_{(K-1)T}^{KT} dy(t) = \int_{(K-1)T}^{KT} u(t)\,dt \Rightarrow \boxed{y(KT) - y[(K-1)T] = \int_{(K-1)T}^{KT} u(t)\,dt}$$

(Podemos resolver esta integral, utilizando os métodos introduzido a cima)

Retangular para a frente



O calculo da integral é aproximado para esta area do retangulo

$$A_{ret} = [KT - (K-1)T] \times u[(K-1)T]$$
$$= [T(K-K+1)] \times u[(K-1)T]$$
$$= T \times u[(K-1)T]$$

Portanto;

$$y(KT) - y[(K-1)T] = \int_{(K-1)T}^{KT} u(t)\,dt$$
$$y(KT) - y[(K-1)T] = Tu[(K-1)T]$$

Aplicando a Transformada Z, temos:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = Tz^{-1}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{T}{z-1} = \frac{1}{\frac{z-1}{T}}$$

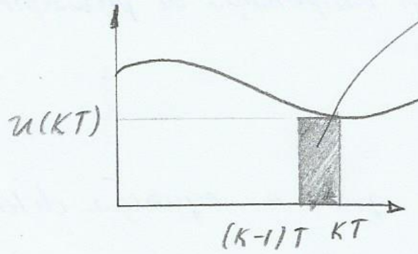
Realizando a troca de variavel

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{T}} \quad ; \quad \boxed{s = \frac{z-1}{T}}$$

Para um sistema ser estável, os pólos do sistema deve estar no semiplano esquerdo do plano s. Logo:

$$\frac{z-1}{T} < 0 \qquad \boxed{z < 1}$$

Retangular para trás



$$A = \{KT - [(K-1)T]\} \times u(KT)$$
$$= T(K - K + 1) \times u(KT)$$
$$\therefore \quad A = T\,u(KT)$$

Logo;
$$y(KT) - y[(K-1)T] = \int_{(K-1)T}^{KT} u(t)\,dt$$

$$y(KT) - y[(K-1)T] = T\,u(KT)$$, Aplicando a Transformada Z,

Temos:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = TU(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz}}$$

Realizando a troca de variável, temos: $\frac{z-1}{Tz} = s$

Para que o sistema seja estável temos:

$$\frac{z-1}{Tz} < 0 \qquad \text{Para } z = \sigma + jw \text{ e } T > 0$$

$$\frac{\sigma + jw - 1}{\sigma + jw} < 0$$

$$\frac{(\sigma + jw - 1)(\sigma - jw)}{(\sigma + jw)(\sigma - jw)} < 0$$

$$\frac{\sigma^2 - \sigma + w^2 + jw}{\sigma^2 + w^2} < 0$$

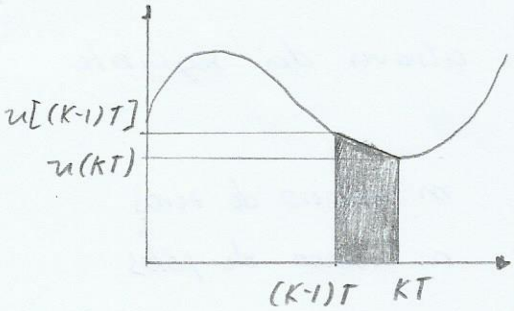
Logo, $\sigma^2 - \sigma + w^2 + jw < 0$

$$(\sigma - 0{,}5)^2 + w^2 < 0{,}5^2$$

(Equação da circunferência)

Portanto, o mapeamento no plano s esta localizado em um círculo com centro em $z = 0{,}5$ e raio igual a $0{,}5$.

Transformação bilinear ou método de Tustin



A area do Trapézio corresponde a:

$$A = \frac{u(KT) + u[(K-1)T]}{2} \times [KT - (K-1)T]$$

$$A = T\left(\frac{u(KT) + u[(K-1)T]}{2}\right)$$

Lembrando que:

$$y(KT) - y[(K-1)T] = \int_{(K-1)T}^{KT} u(t)\,dt$$

$$y(KT) - y[(K-1)T] = T\left(\frac{u(KT) + u[(K-1)T]}{2}\right)$$

Aplicando a Transformada Z:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = T\left(\frac{U(z) + z^{-1}U(z)}{2}\right)$$

Logo, $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} = \dfrac{1}{\dfrac{2(z-1)}{T(z+1)}}$

Aplicando a mudança de variável,

$$\boxed{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

Logo $\dfrac{2(z-1)}{T(z+1)} < 0$

$\dfrac{z-1}{z+1} < 0$; $z = \sigma + j\omega$

$\dfrac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} \times \dfrac{(\sigma - j\omega + 1)}{(\sigma - j\omega + 1)} < 0$

$\sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0$

$\boxed{\sigma^2 + \omega^2 < 1}$ Para ser estável

(Transformação bilinear com compensação de prewarping ?)

Mapeamento polo-zero

Os polos e zeros são mapeados no plano z, através da seguinte relação $z = e^{sT}$.

Para: $\boxed{G(s) = K \dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}}$

m: número de zeros
n: número de pólos

* O pólo em $s = p_n$ é mapeado em $z = e^{p_n T}$
* O zero finito em $s = z_m$ é mapeado em $z = e^{z_m T}$

* Quando $m < n$ possui zeros no infinito: Logo são mapeados em $z = -1$
(números de zeros menor que o número de pólos)

Para compensar este fato é adicionado $(n-m-1)$ fatores de $(z+1)$ no numerador de $G(z)$

* Agora deve-se ajustar o ganho de $G(z)$ { Ajustar para baixas frequências o ganho do sistema contínuo seja igual ao do sistema discreto

$$G(s)\big|_{s=0} = G(z)\big|_{z=1}$$

Exemplo: $G(s) = \dfrac{K}{(s-p)}$

Mapeamento do polo $p \Rightarrow (z - e^{pT})$

$\boxed{\text{Exemplo 12.2}}$ Para $G(s) = \dfrac{2}{s+2}$ e $T = 1s$

Mapeamento do pólo em $-2 \Rightarrow z^{-2T}$

Temos 0 zeros $(m=0)$ e 1 pólo $(n=1)$; Logo $n-m-1=0$. Portanto, não precisa adicionar zeros no sistema

$G(z) = \dfrac{K}{(z - e^{-2T})}$ Para $G(s)\big|_{s=0} = G(z)\big|_{z=1}$

$$\frac{2}{2} = \frac{K}{1-e^{-2}} \quad \therefore \quad K = 0,865$$

Portanto, $\boxed{G(z) = \dfrac{0,865}{z - 0,135}}$

Exemplo 12.3 Dada a função de Transferência

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$, Supondo $T = 1s$

Determine a Função de Transferência do sistema Discreto usando o método do mapeamento polo-zero.

O sistema possui $\begin{cases} m = 1 \text{ zero} \\ n = 3 \text{ pólo} \end{cases}$ $n - m - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$ ∴ Adicionar o zero em $(z+1)$

O mapeamento polo-zero é:

$$G(z) = \frac{K(z - e^{T})(z+1)}{(z - e^{2T})(z - e^{3T})(z - e^{4T})}$$; Para $T = 1s$, temos:

$$G(z) = \frac{K(z - 0{,}3679)(z+1)}{(z - 0{,}1353)(z - 0{,}0498)(z - 0{,}0183)}$$

Para baixas frequências do sistema contínuo: $G(s)\big|_{s=0} = G(z)\big|_{z=1}$

$$\frac{2}{24} = \frac{K(1 - 0{,}3679)(1+1)}{(1 - 0{,}1353)(1 - 0{,}0498)(1 - 0{,}0183)}$$ ∴ $\boxed{K \cong 0{,}0532}$

Portanto,

$$\boxed{G(z) = \frac{0{,}0532(z - 0{,}3679)(z+1)}{(z - 0{,}1353)(z - 0{,}0498)(z - 0{,}0183)}}$$

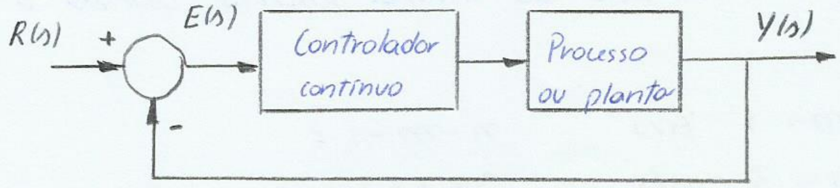
Projeto de Controladores Digitais

O projeto de Controladores no tempo Discreto pode ser realizado de duas formas:

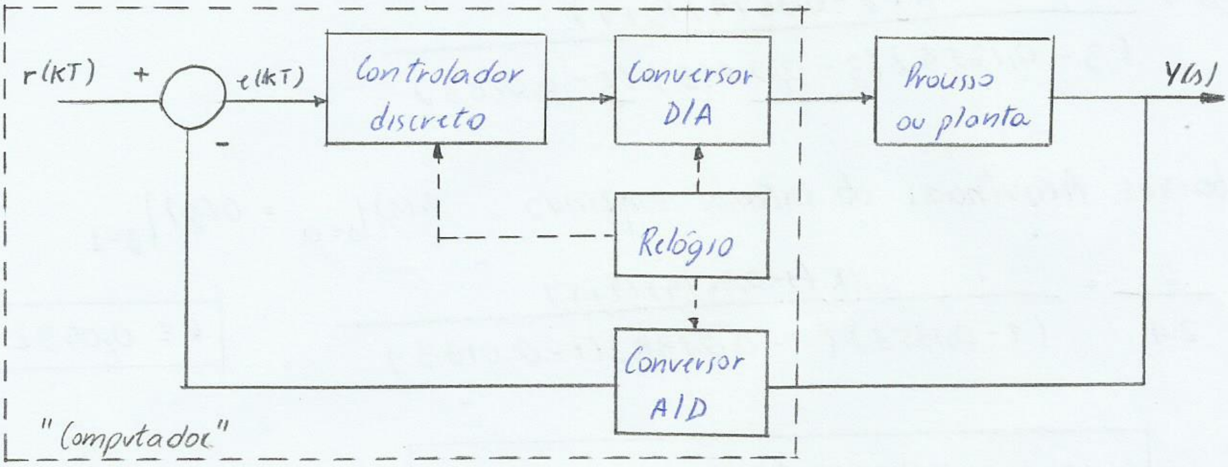
- Através de aproximações discretas do projeto realizado no domínio contínuo por meio da transformada de Laplace
- Diretamente no domínio discreto por meio da transformada Z.

Projeto de controlador discreto a partir de projeto de controlador contínuo.

Para o seguinte Sistema de Controle Contínuo



Para representar o Sistema de Controle Contínuo acima no domínio Discreto, Adiciona-se os blocos conversores A/D e D/A



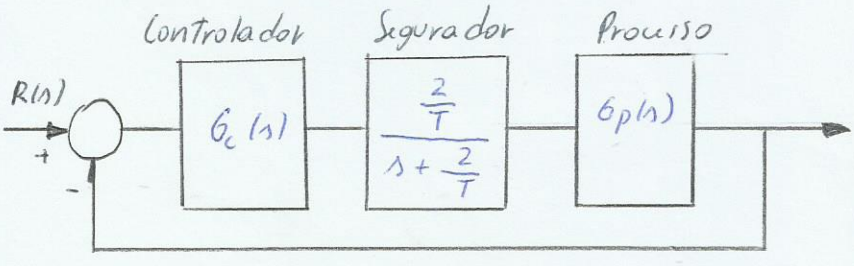
Neste novo circuito temos o processo de amostragem e o circuito segurador que introduzem na malha um atrazo de tempo que reduz a estabilidade relativa do sistema.

Função de Transferência do Segurador de Ordem Zero:

$$G_{so}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

A Função de Transferência Racional aproximada para o segurador de ordem zero, corresponde a:

$$\boxed{G_{so}(s) = \frac{\frac{2}{T}}{s + \frac{2}{T}}}$$



Análise Temporal dos Sistemas de 1ª e 2ª Ordem

Para um sistema linear de primeira ordem

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ts+1}} \longrightarrow Y(s)$$

Função de Transferência $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{Ts+1}$

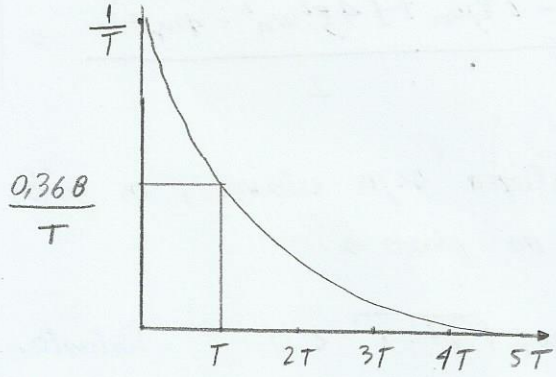
Resposta ao Impulso

P/ $U(s)$: Impulso

$\therefore U(s) = 1 \Rightarrow u(t) = \delta(t)$

$Y(s) = \dfrac{1}{Ts+1} \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{T} e^{-t/T}$

T: Constante de Tempo



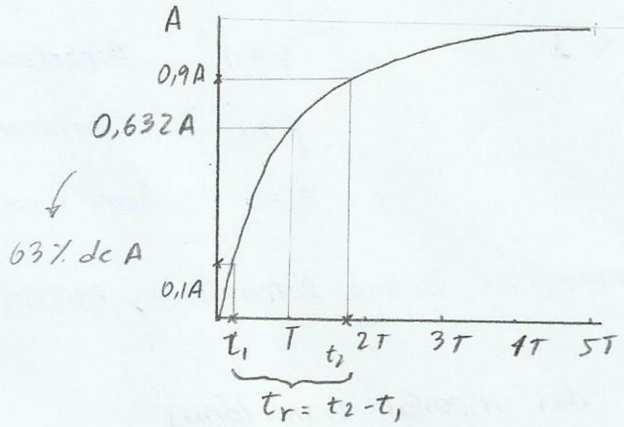
Resposta ao Degrau

P/ $U(s)$: Degrau

$\therefore U(s) = \dfrac{A}{s} \Rightarrow u(t) = A, t \geq 0$

$Y(s) = \dfrac{A}{s(Ts+1)} = \dfrac{A}{s} - \dfrac{A}{s+\frac{1}{T}}$

$y(t) = A(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0$



Quanto menor a constante de Tempo (T), mais rapido é a resposta.

Tempo de subida t_r (rise time) é o tempo de resposta para um degrau de entrada 1V de 10% a 90%

Resposta à rampa

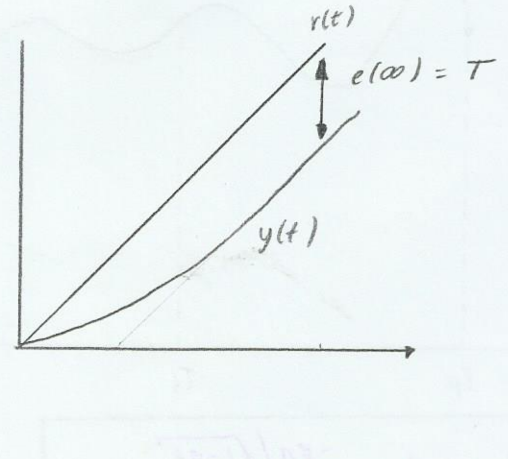
P/ $U(s)$: rampa

$\therefore U(s) = \dfrac{1}{s^2} \Rightarrow u(t) = t, \quad t \geq 0$

$Y(s) = \dfrac{1}{s^2(Ts+1)} = \dfrac{\frac{1}{T}}{s^2\left(s+\frac{1}{T}\right)}$

$= \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{T}{s} + \dfrac{T}{s+\frac{1}{T}}$

$\therefore y(t) = t - T + T e^{-t/T}, \quad t \geq 0$



Para o Sistema de 2ª Ordem, temos:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

; logo $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$

Os pólos da função de transferência são:

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi w_n \pm \sqrt{4\xi^2 w_n^2 - 4w_n^2}}{2} = \boxed{-\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1}}$$

Para que o sistema seja estável, os pólos devem estar localizados no semiplano esquerdo do plano s

$$-\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1} < 0$$

$$-\xi \pm \sqrt{\xi^2-1} < 0$$

$$\sqrt{\xi^2-1} < 1$$

Portanto, Para $\xi = \ldots$

$0 < \xi < 1$: Subamortecido

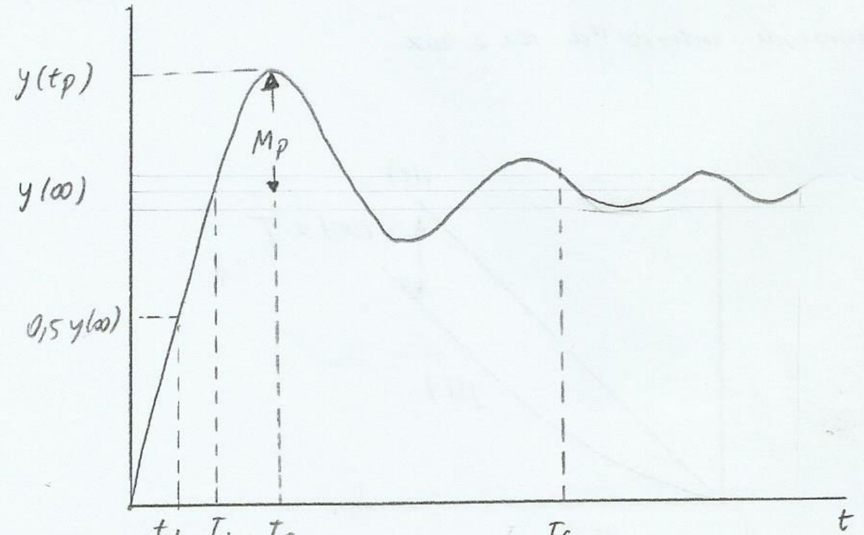
$\xi = 1$: Amortecimento crítico

$\xi > 1$: Superamortecido ou sobreamortecido

$\xi = 0$: Sem amortecimento

(Mais Informação: Controle Automático, CASTRUCCI (pag 70 - 74))

Características das respostas transitórias



t_d: tempo de atraso (Delay time)

t_r: tempo de subida (rise time)

t_p: tempo de pico (peak time)

t_s: tempo de acomodação (setting time)

M_p: Sobressinal máximo (Overshoot ou maximum peak)

$$\boxed{\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi w_n \pm j w_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -\xi w_n \pm j w_d \end{aligned}}$$

$$\boxed{M_p(\%) = \frac{y(t_p)-y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%}$$

$t_p = \dfrac{\pi}{w_d}$ $\quad T = \dfrac{T_d}{10}$

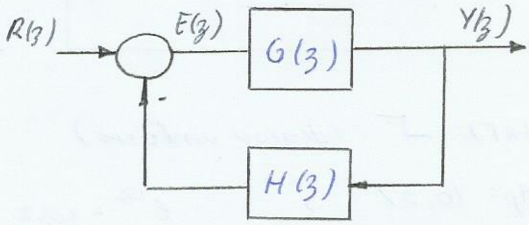
$$\boxed{t_s = \frac{4}{\xi w_n}} \qquad \boxed{T_d = \frac{2\pi}{w_d}}$$

$w_n = \dfrac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{w_d}} \qquad \boxed{t_r = \frac{\pi-\beta}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{w_d}}$$

Erro estacionário ou permanente

Para a seguinte sistema:



$$E(z) = R(z) - \overbrace{H(z)Y(z)}^{G(z)E(z)}$$
$$= R(z) - G(z)H(z)E(z)$$

$$E(z)\left[1 + G(z)H(z)\right] = R(z)$$

$$\therefore \boxed{E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)}}$$

Sistema tipo L	Degrau	Rampa
0	$\frac{A}{1+K}$	∞
1	0	$\frac{AT}{K}$
2	0	0

L : Indica o número (quantidade) de integradores ou pólos em $z = 1$

Projeto de controlador no plano z

DIFICULDADE: Escolha dos polos da malha fechada para os índices de desempenho desejado.

Como é mais complicado ~~projetar o controlador~~ (escolher os polos em malha fechada no plano z, pois estão sobre curvas que se amontam no ponto $z=1$, pode-se obter por meio de um mapeamento dos polos em s.

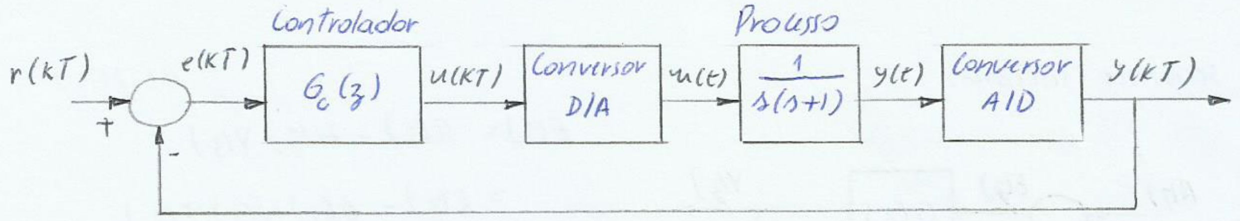
1º passo: Converter as especificações de desempenho em localizações de polos em "s"

2º passo: Mapear os polos desejados para o "plano z"

3º passo: Obter a planta no domínio z por meio da transformada z obtendo H(z)

4º passo: Realizar o projeto do controlador por meio dos métodos já conhecidos

Exemplo 12.6



Projetar controlador $G_c(z)$ para: $\begin{cases} r(kT) \text{ (degrau unitário)} \\ M_p = 16{,}3\% \\ t_p = 1\,s \end{cases}$ $\quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \Rightarrow \ln(M_p) = \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_d}$$

$$(1-\xi^2)[\ln(M_p)]^2 = \xi^2\pi^2$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \qquad \xi^2[\pi^2 + \ln^2(M_P)] = \ln^2(M_P)$$

?

$$\therefore \xi = \frac{\ln(M_P)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(M_P)]^2}}$$

Para $M_P = 0{,}163$, temos: $\xi = 0{,}5$

$$w_d = \frac{\pi}{t_p} \Rightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad w_n = \frac{(\pi/t_p)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

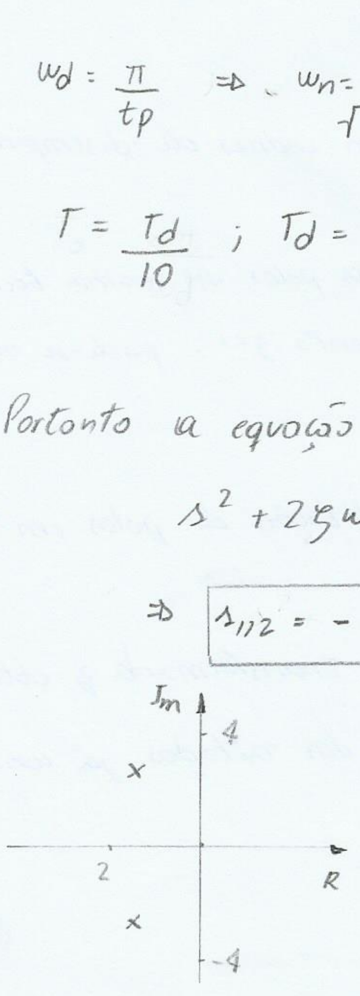
Para $t_p = 1\,s$ temos: e $\xi = 0{,}5$ $\quad w_n = 3{,}628\ \frac{rad}{s}$

$$T = \frac{T_d}{10}\ ; \quad T_d = \frac{2\pi}{w_d} \quad e \quad w_d = \frac{\pi}{t_p} \qquad \therefore \begin{cases} w_d = \pi \\ T_d = 2 \\ T = 0{,}2\,s \end{cases}$$

Portanto a equação característica corresponde a:

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 \Rightarrow s^2 + 2 \times 0{,}5 \times 3{,}628\,s + 3{,}628^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{1,2} = -1{,}814 \pm \pi j} \quad (\text{Pólos em malha fechada})$$



Plano s

Mapeamento do plano s no plano z.

$$z_{1,2} = e^{Ts_{1,2}} = e^{(-1{,}814 \pm \pi j)T} = e^{-1{,}814} e^{\pm \pi T j}$$

$$z_{1,2} = e^{-1{,}814T} \cdot [\cos(\pi T) \pm j \sin(\pi T)]\ ; \quad T = 0{,}2$$

$$\therefore \boxed{z_{1,2} = 0{,}563 \pm 0{,}409 j}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)} \quad (\text{Planta})$$

Para determinar a função de transferência $H(z)$ do subsistema

D/A + processo + A/D

$$H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Pendulo Invertido
pg 143

Portanto,

$$H(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$\therefore H(z) = \left(\frac{z-1}{\cancel{z}}\right) \frac{(T - 1 + e^{-T})z^2 + (1 - e^{-T} - Te^{-T})\cancel{z}}{(z-1)^2 (z - e^{-T})}$$

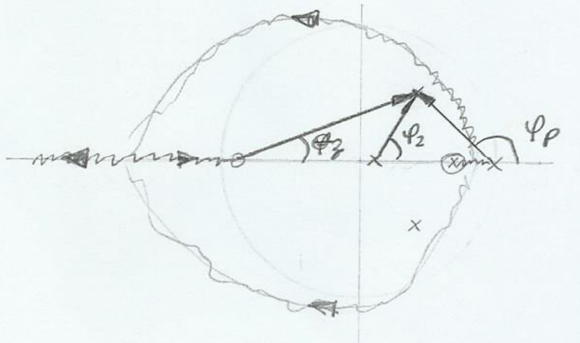
Para $T = 0{,}2\,s$ temos

$$H(z) = \frac{0{,}0187 z + 0{,}0175}{(z-1)(z-0{,}8187)} \quad \therefore \boxed{H(z) = \frac{0{,}0187(z+0{,}935)}{(z-1)(z-0{,}8187)}}$$

Projeto de controladores

Para $G_c(z) = K\dfrac{(z+C_1)}{(z+C_2)}$, Logo $G(z) = G_c(z)\, G_p(z)$

$$G(z) = \frac{K(z+C_1)\, 0{,}0187(z+0{,}935)}{(z+C_2)(z-1)(z-0{,}8187)}$$



- Cancelar o pólo em 0,8187

$\therefore C_1 = -0{,}8187$, logo temos

$$G(z) = \frac{0{,}0187\, K(z+0{,}935)}{(z+C_2)(z-1)}$$

$$\Sigma\theta - \Sigma\varphi = 180°$$

$$\underline{/z+0{,}935} - \underline{/z+C_2} + \underline{/z-1} = -180°$$

$$15 - \underline{/z+C_2} - 134{,}87 = -180$$

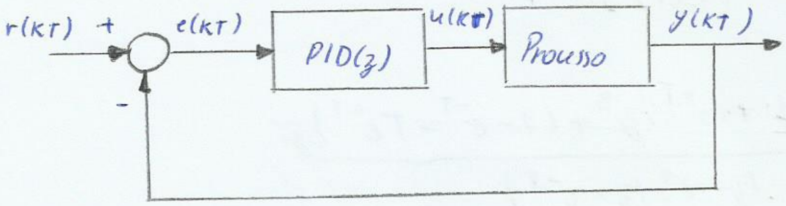
$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{0{,}4090}{0{,}5623+C_2}\right) = 60{,}40 \quad \therefore C_2 = 0{,}331$$

Projeto por meio do lugar das raízes

O principal objetivo é calcular uma função de transferência para o controlador $G_c(z)$ de modo que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechados desejados.

Veja o controlador: $\boxed{G_c(z) = \dfrac{K(z+C_1)}{z+C_2}}$

Controlador PID discreto



$$G_c(z) = PID(z) = \bar{K}_C + \bar{K}_I \frac{1}{(1-z^{-1})} + \bar{K}_D(1-z^{-1}) \quad \text{ou} \quad G_c(z) = \frac{K(z+C_1)(z+C_2)}{z(z-1)}$$

Exemplo 12.7

- Projetar um controlador G_c, para:
  - erro estacionário nulo para um degrau na entrada
  - $\xi = 0,5$, $w_n = 2$ rad/s
  - Planta: $\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

Determinar $G(s) \to G(z)$ $\left\{ G(z) = H(z) = (1 - z^{-1}) \, Z\left[\dfrac{G(s)}{s}\right] \right.$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}\right]$$

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{0,5\,z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} + 0,5\,\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

Pólo em malha fechada:

$$s_{1,2} = \underbrace{-\xi w_n}_{\alpha} \pm j \underbrace{w_n\sqrt{1-\xi^2}}_{w_d} \quad ; \quad w_d = 2\sqrt{1-0,5^2} = 1,7 \text{ rad/s}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{1,7} \therefore T_d = 3,6\,s$$

Periodo T_d das oscilações: 3,6 s

Logo Periodo de amostragem $\frac{T_d}{10} \to T = 0,36 \simeq 0,4\,s$

Pólos dominantes: $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$ (No plano s)

Mapeamento de $s_{1,2}$ em z: $z_{1,2} = e^{T s_{1,2}}$

$$z_{1,2} = e^{0,4(-1 \pm j\sqrt{3})} = e^{-0,4} \cdot e^{\pm j\,0,4\sqrt{3}} = e^{-0,4}\left(\cos 0,4\sqrt{3} \pm j \,\text{sen}\, 0,4\sqrt{3}\right)$$

$$z_{1,2} = 0,5158 \pm j\,0,4281 \quad (\text{Pólos dominantes em } z)$$

A função de transferência em z para $T = 0,4\,s$:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{0,5z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-0,4}} + \frac{0,5\,z}{z-e^{-0,8}}\right)$$

Logo $G_p(z) = \dfrac{0,0543\,(z+0,6703)}{(s-0,4493)(z-0,6703)}$

$$G_c(s) = \frac{K(s+C_1)}{(s+C_2)} \qquad G_p = \frac{0{,}0543(z+0{,}6703)}{(z-0{,}4493)(z-0{,}6703)}$$

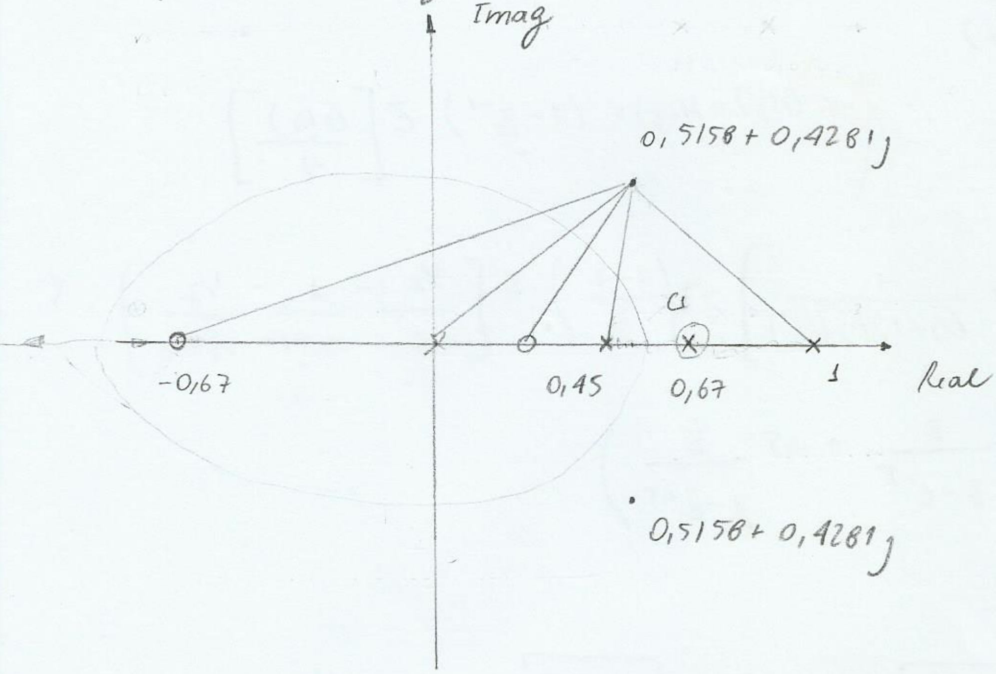
$m = 1$

$n = 2$

$n - m - 1 = 2-1-1 = 0$

(Não precisa adicionar $z+1$)

Para erro estacionário nulo para entrada degrau, deve-se adicionar um pólo na origem.



$$G_c(s) = \frac{K(z+C_1)(z+C_2)}{(z+C_3)(z-1)}$$

Logo,

$$G = G_c(z)\,G_p(z) = \frac{K(z-0{,}6703)(z+C_2)}{z(z-1)}\,G_p(z)$$

Portanto, foi adicionado um zero no pólo em 0,67 para cancelá-lo, um polo em -1 para erro estacionário nulo, pólo na origem e zero no eixo real positivo para alocar o LGR passar pelos pólos dominantes

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = -180$$

$$\angle z+0{,}67 + \angle z+C_2 - \angle z - \angle z-0{,}45 - \angle z-1 = -180$$

$$19{,}85 + \theta_{C2} - 39{,}69 - 81{,}7 - 138{,}51 = -180$$

$$\theta_{C2} = 60{,}05^\circ = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}4281}{0{,}5158 + C_2}\right) \therefore C_2 = -0{,}269$$

Logo

$$G = \frac{K(\cancel{z-0{,}6703})(z-0{,}269)}{z(z-1)} \times \frac{0{,}0543(z+0{,}6703)}{(z-0{,}4493)\cancel{(z-0{,}6703)}}$$

$$G = \frac{0{,}0543\,K\,(z-0{,}269)(z+0{,}6703)}{z(z-1)(z-0{,}4493)}$$

Para determina K, $|G|=1$

Para o pólo em $0{,}5158 + 0{,}4281j$ temos $\boxed{K = 5{,}55}$

Portanto,

$$G_c = \frac{5{,}55\,(z-0{,}269)(z-0{,}6703)}{z(z-1)} \quad e$$

$$G = \frac{0{,}3\,(z-0{,}269)(z+0{,}6703)}{z(z-1)(z-0{,}4493)}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{0{,}3(z-0{,}269)(z+0{,}6703)}{\underbrace{0{,}3(z-0{,}269)(z+0{,}6703)+z(z-1)(z-0{,}4493)}_{\text{Equação característica}}}$$

Para a eq. característica acima, temos os seguintes pólos

$z_{1,2} = 0{,}5158 \pm 0{,}4281j$

$z_3 = 0{,}1181$

Projeto por meio de imposição algébrica de polos

- Cancelando o pólo em 0,6703, temos: $G_c = \dfrac{K\,(z-0{,}6703)(z-C_2)}{z(z-1)}$

Logo, $G = \dfrac{0{,}0543K\,(z+0{,}6703)(z-C_2)}{z(z-1)(z-0{,}4493)}$

~~Exemplo~~

Exercícios Propostos

Exercício 12

$Up\% = 16,3\%$

Planta: $\dfrac{1}{s(s+2)}$ $\quad t_{ac} = 2s$ (2%)

$$MP(\%) = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100$$

$$\ln\left(\frac{MP(\%)}{100}\right) = \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\ln^2\left(\frac{MP(\%)}{100}\right)(1-\xi^2) = (-\xi\pi)^2$$

$$\ln^2\left(\frac{MP(\%)}{100}\right) = (-\xi\pi)^2 + \xi^2 \ln^2\left(\frac{MP(\%)}{100}\right)$$

$$\ln^2\left(\frac{MP(\%)}{100}\right) = \xi^2\left[\pi^2 + \ln^2\left(\frac{MP(\%)}{100}\right)\right]$$

$$\therefore \xi = \frac{-\ln\left(\frac{MP(\%)}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{MP(\%)}{100}\right)}}$$

Para $MP(\%) = 16,3\%$

$\xi = 0,5$

$t_s = \dfrac{4}{\xi w_n}$; Para $\xi = 0,5$ e $T_s = 2$ $\therefore$ $w_n = 4$ rad/s

$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$; $w_n = 4$ e $\xi = 0,5$ $\therefore$ $w_d = 3,46$ rad/s

Logo, Pólos dominante $\boxed{s_{1,2} = -2 \pm j\,3,46}$

$$G_p = H(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right] = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{1/2}{s^2} - \frac{1/4}{s} + \frac{1/4}{s+2}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\left[0,5\frac{Tz}{(z-1)^2} - 0,25\frac{z}{z-1} + 0,25\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$T_d = \dfrac{2\pi}{w_d} = \dfrac{2\pi}{3,46}$ $\therefore$ $T_d = 1,81\,s$ $\quad T = 0,181\,s$

Controlador: $G_c = \dfrac{K(s+C_1)}{(s+C_2)}$; $C_1 = -1$

$G = G_p \cdot G_c = \dfrac{K\cancel{(s-1)}}{(s+C_2)} \times \dfrac{0{,}014(z+0{,}9542)}{\cancel{(s-1)}(s-0{,}696)}$

$\Sigma \varphi_p - \Sigma \varphi_z = -180$

$\angle z+0{,}9542 - \angle s+C_2 - \angle s-0{,}696 = -180$

$21{,}67 - \angle s+C_2 - 61{,}08 = -180$

$tg^{-1}\left(\dfrac{0{,}84}{1{,}16+C_2}\right) = 140{,}59 \quad \therefore \quad C_2 = -2{,}18$

$G_c = \dfrac{K(s-1)}{(s-2{,}18)}$ $\qquad G = G_p \cdot G_c$

$|G| = 1$

$G = \left|\dfrac{0{,}014K(z+0{,}9542)}{(s-2{,}18)(s-0{,}696)}\right| = 1$

Para $z = 1{,}16 + j0{,}84$; $K = 39{,}81$

Exemplo 12.10

- Projetar um controlador dead beat
- tac (min)
- $e(\infty)=0$ para entrada degrau
- $T=1s$

Função de transferência da planta: $G_p(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s+1}$

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{e^{-2s}}{s(s+1)}\right] = (1-z^{-1})\, z^{-2}\, Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

Logo, $$G_p(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right] = \frac{1}{z^2} - \frac{(z-1)}{z^2(z-e^{-T})}$$

$$= \frac{(z-e^{-T})-(z-1)}{z^2(z-e^{-T})} = \frac{1-e^{-T}}{z^2(z-e^{-T})}$$

Para $T=1s$ temos $$G_p(z) = \frac{0,6321}{z^3-0,3679z^2} = \frac{0,6321z^{-3}}{1-0,3679z^{-1}}$$

Para G_p de ordem 3 temos:

$$G_{mf}(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + g_3 z^{-3}$$

$$\begin{array}{l|l} 0,6321\, z^{-3} & 1-0,3679z^{-1} \\ \hline -0,6321\, z^{-3} + 0,2325z^{-4} & 0,6321 z^{-3} + \dots \\ \hline 0,2325 z^{-4} & \end{array}$$

Ocorrerá um atraso de 3 períodos de amostragem.

Logo, $G_{mf}(z) = g_3 z^{-3}$

$$G_{mf}(1) = 1 \Rightarrow 1 = g_3\, 1^{-3} \Rightarrow g_3 = 1$$

$$\boxed{G_c(z) = \frac{1}{G_p(z)}\frac{G_{mf}(z)}{[1-G_{mf}(z)]}}$$

Controlador Dead beat

$$G_c(z) = \frac{(1-0,3679z^{-1})}{0,6321z^{-3}}\frac{z^{-3}}{[1-z^{-3}]}$$

$$G_c(z) = \frac{1,582\,(1-0,3679z^{-1})}{(1-z^{-3})} = \frac{U(s)}{E(s)}$$

$$u(KT) = u[(K-3)T] + 1,582\,(e(KT) - 0,3679\, e(K-1)T])$$

Exemplo 12.11

- Controlador Dead Beat
- T = 1 s

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\,Z\left[\frac{1}{s(s+1)(s-0{,}5)}\right] = (1-z^{-1})\,Z\left[\frac{-0{,}5}{s} + \frac{2/3}{s+1} + \frac{4/3}{s-0{,}5}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[-0{,}5\,\frac{z}{z-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{z}{(z-e^{-T})} + \frac{4}{3}\,\frac{z}{(z-e^{+0{,}5T})}\right]$$

$$= -0{,}5 + \frac{2}{3}\left(\frac{z-1}{z-e^{-T}}\right) + \frac{4}{3}\,\frac{(z-1)}{(z-0{,}e^{0{,}5T})}$$

Para $t=1$ $\quad G_p(z) = \dfrac{0{,}4435\,(z+0{,}8490)}{(z-0{,}3679)(z-1{,}6487)} = \dfrac{0{,}4435\,z^{-1}+0{,}3766\,z^{-2}}{1-2{,}0166\,z^{-1}+0{,}6065\,z^{-2}}$

Para G_p de 2ª Ordem temos

$$G_{me}(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}$$

Zero: $G_{me}(a)=0$.

Zero: $1-G_{me}(b)=0$

$$0{,}4435\,z^{-1}+0{,}3766\,z^{-2} \quad \big| \quad 1-2{,}0166\,z^{-1}+0{,}605\,z^{-2}$$

$$z^{-1}$$

logo tem um atraso de 1 amostra $\rightarrow$ $G_{me}(z) = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}$

$G_{me}(1) = 1$

$g_1 + g_2 = 1$

Como o pólo da planta está fora do círculo unitário: 1,6487, temos $1 - G_{me}(1{,}6487) = 0$

$$1 - \frac{g_1}{1{,}6487} - \frac{g_2}{1{,}6487^2} = 0 \qquad 0{,}6065\,g_1 + 0{,}3679\,g_2 = 1$$

$$\begin{cases} g_1 + g_2 = 1 \\ 0{,}6065\,g_1 + 0{,}3679\,g_2 = 1 \end{cases}$$

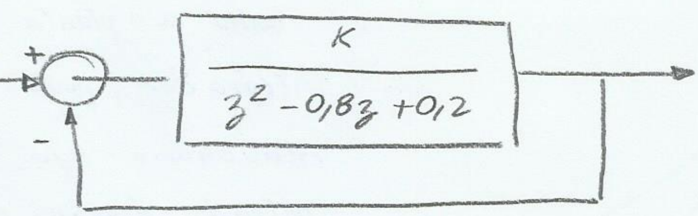
$$0{,}6065\,g_1 + 0{,}3679\,(1-g_1) = 1$$

$$(0{,}6065 - 0{,}3679)\,g_1 = 1 - 0{,}3679$$

$$\therefore \; g_1 = 2{,}6492$$

$$g_2 = -1{,}6492$$

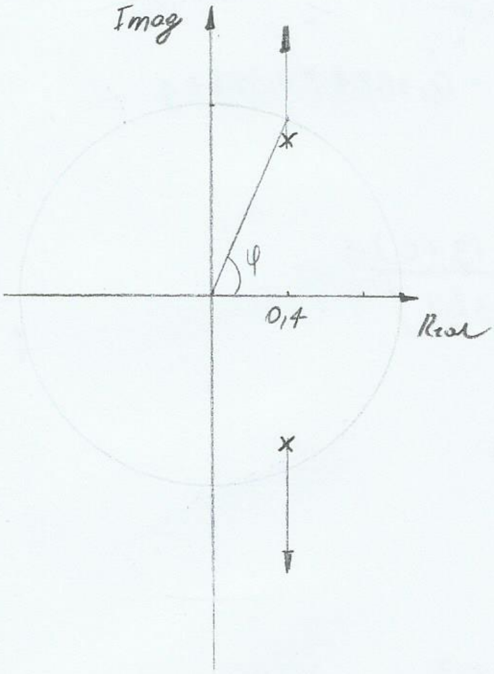
Exercício 12.2



$$G_p = \frac{K}{z^2-0,8z+0,2} \qquad z^2-0,8z+0,2=0$$

$$z=\frac{0,8 \pm \sqrt{0,8^2-4\times 0,2}}{2} \;;\; z_{12} = 0,4 \pm j\,0,8$$

(Pólos em m. a.)



Polo : $0,4 + jh$

$$0,4^2 + h^2 = 1 \quad \therefore \quad h = 0,9165$$

$$G_p(0,4+j\,0,9165) = \frac{K_{max}}{-0,8}$$

$$|G_p| = 1 \quad \therefore \quad K_{max} = 0,8$$

logo : $\boxed{0 < K < 0,8}$

Exercício 12.3

Projete um controlador $G_c(z)$

- erro estacionario nulo para ⌐ na entrada
- $\xi = 0,6 \quad w_n = 1$ rad/s $\quad T = 1$ s

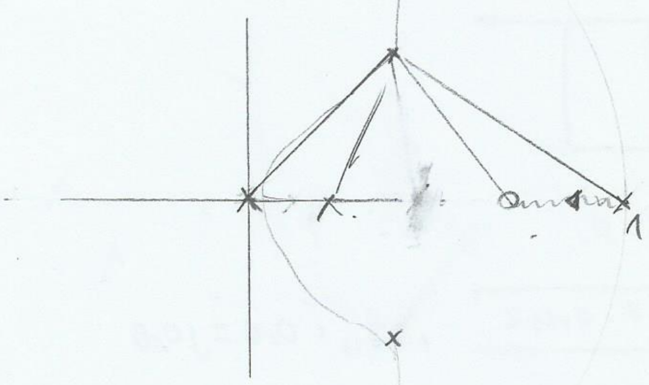
$$s_{12} = -\xi w_n \pm j w_n\sqrt{1-\xi^2} = -0,6 \pm j\sqrt{1-0,6^2} \quad \therefore \quad s_{1,2} = -0,6 \pm j\,0,8$$

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{e^{-s}}{s(s+2)}\right] = (1-z^{-1})\, z^{-1}\, Z\left[\frac{0,5}{s} - \frac{0,5}{s+2}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z^2}\right)\left[0,5\frac{z}{z-1} - 0,5\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$= 0,5\left(\frac{1}{z} - \frac{z-1}{z(z-e^{-2T})}\right) = 0,5\left(\frac{z-e^{-2T}-z+1}{z(z-e^{-2T})}\right) = \frac{1-e^{-2T}}{z(z-e^{-2T})}$$

Para $T=1$ temos $G_p(z) = \dfrac{0,4323}{z(z-0,1353)}$



Como a planta não possui integrador, para que o erro estacionário seja nulo para a entrada degrau o controlador deve possuir um polo em $z = 1$

$$p_{1,2} = e^{T s_{1,2}} = 0,3824 \pm 0,3937 j$$

$$G_{c(z)} = \frac{K(z+C)}{(z-1)}$$

$$\Sigma \theta_z - \Sigma \theta_p = -180$$

$$\angle z-c - \angle z - \angle z-0,1353 - \angle z-1 = -180$$

$$\angle z-c - 45,83 - 57,89 - 147,46 = -180$$

$$tg^{-1}\left(\frac{0,3937}{0,3824+c}\right) = 71,8 \quad \therefore \quad c = -0,253$$

Questão prova)

(a)

$r(kT)$: É a referência de entrada no tempo discreto.

$e(kT)$: É o erro apartir da realimentação. É a diferença da entrada com a realimentação: $e(kT) = r(kT) - y(kT)$

$u(kT)$: É o esforço de controle no tempo discreto

$$u(kT) = e(kT)\,G_c(z)$$
$$= [r(kT) - y(kT)]\,G_c(z)$$

$u(t)$: É o esforço de controle no tempo contínuo

$w(t)$: É a resposta do motor $\quad w(t) = \frac{600}{s+6}\,u(t)$

$w'(t)$: É a resposta da redução

$$w'(t) = \frac{30}{s+6}\,u(t)$$

$y(t) = \frac{6}{s(s+6)}\,u(t)$ Saída no tempo contínuo.

$$G_p(t) = \frac{6}{s(s+6)} \quad ; \quad G_p(t) = \frac{y(t)}{u(t)}$$

$$G_p(z) = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{6}{s^2(s+6)}\right] = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{6}{s^2} - \frac{1/6}{s} + \frac{1}{s+6}\right]$$

$$6(s+6)^{-1} \to -6(s+6)^{-2} \quad p/\ s = 0$$

$$G_p(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[\frac{6Tz}{(z-1)^2} - (1/6)\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-6T}}\right]$$

$$= \frac{6T}{(z-1)} - \frac{1}{6} + \frac{z-1}{z - e^{-6T}}$$

$$= \frac{36T(z - e^{-6T}) + (z-1)(z - e^{-6T}) + 6(z-1)^2}{6(z-1)(z - e^{-6T})}$$

$$= \frac{36Tz - 36Te^{-6T} + z^2 - ze^{-6T} - z + e^{-6T} + 6z^2 - 12z + 6}{6(z-1)(z-e^{-6T})}$$

$$=$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 10.1)

$$F(z) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K}$$

Portanto, $F(z) = 0z^{-0} + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} + 0z^{-6}$

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} = \boxed{\frac{z^2 + 2z + 3}{z^3}}$$

Exercício 10.2)

$$U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$Y(z) = \sum_{K=0}^{\infty} Y(K) z^{-K}$$

$$= 2z^{-0} + 1z^{-1} + 0{,}5z^{-2} + 0{,}25z^{-3} + 0{,}125z^{-4} + \cdots$$

Para $|K| > 1 \rightarrow q = 0{,}5z^{-1}$

Progressão Geométrica

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

Porque ?

$$Y(z) = \frac{2}{1 - 0{,}5z^{-1}} = \frac{2z}{z - 0{,}5}$$

Exercício 10.3)

$$y(K+2) - y(K+1) + 0{,}09\, y(K) = u(K) \quad , \text{ com } y(0) = y(1) = 0$$

$u(K)$: Degrau Unitário

a) Transformada Z de $y(K)$

b) $\lim_{K \to \infty} y(K)$

Aplicando a propriedade de Avanço:

$$Z[f(K+n)] = z^n \left(F(z) - \sum_{K=0}^{n-1} f(K) z^{-K} \right)$$

$$Z[\, y(K+2) - y(K+1) + 0{,}09\, y(K) = u(K)]$$

$$z^2\left(Y(z) - \sum_{K=0}^{1} y(K) z^{-K}\right) - z\left(Y(z) - \sum_{K=0}^{0} y(K) z^{-K}\right) + 0{,}09\, Y(z) = U(z)$$

$$z^2\left[Y(z) - y(0) - y(1)z^{-1}\right] - z\left[Y(z) - y(0)\right] + 0{,}09\, Y(z) = U(z)$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$z^2\, Y(z) - z\, Y(z) + 0{,}09\, Y(z) = U(z)$$

$$Y(z)\,(z^2 - z + 0{,}09) = U(z) \rightarrow Y(z) = \frac{U(z)}{z^2 - z + 0{,}09}$$

Sabendo que $U(z)$ é um degrau unitório

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Portanto, $\boxed{Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}09)}}$

b) Teorema do Valor final

$$\lim_{K \to \infty} f(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

$$= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0{,}09)}$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\right) \frac{\cancel{z}}{\cancel{(z-1)}(z^2 - z + 0{,}09)} = \boxed{\frac{1}{0{,}09}}$$

Exercício 10.4)

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z^2 - 2z + 2)(z-1)}$$ Determine Transformada Z inversa

$$F(z) = \frac{z^2 + 4z}{z^3 - 2z^2 + 2z - z^2 + 2z - 2} = \frac{z^2 + 4z}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2}$$

$$F(z) = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3}}$$

$$
\begin{array}{l}
z^{-1} + 4z^{-2} \\
-z^{-1} + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 2z^{-4} \\
\hline
7z^{-2} - 4z^{-3} + 2z^{-4} \\
-7z^{-2} + 21z^{-3} - 28z^{-4} + 14z^{-5} \\
\hline
17z^{-3} - 26z^{-4} + 14z^{-5} \\
-17z^{-3} + 51z^{-4} - 68z^{-5} + 34z^{-6} \\
\hline
25z^{-4} - 54z^{-5} + 34z^{-6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
1 - 3z^{-1} + 4z^{-2} - 2z^{-3} \\
\hline
z^{-1} + 7z^{-2} + 17z^{-3} + 25z^{-4} + 21z^{-5} \dots
\end{array}
$$

Portanto, $F(z) = z^{-1} + 7z^{-2} + 17z^{-3} + 25z^{-4} + 21z^{-5} + \dots$

Sendo $f(0)=0 \quad f(1)=1 \quad f(2)=7 \quad f(3)=17 \quad \dots$

Exercícios Propostos

Exercício 10.5

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}\,\mathrm{sen}\,wt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Lembrando que

$$F(z) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K}$$

$$F(z) = \cancel{e^{-a.0}}\,\mathrm{sen}\,w0\,z^{-0} + e^{-a1}\,\mathrm{sen}\,wT z^{-1} + e^{-a2}\,\mathrm{sen}\,w2T z^{-2} + e^{-a3}\,\mathrm{sen}\,w3T + \dots$$

Através da tabela, temos

$$Z[e^{-at}\,\mathrm{sen}\,wt] = \frac{z e^{-aT}\,\mathrm{sen}\,wT}{z^2 - 2z e^{-aT}\cos wT + e^{-2aT}}$$

Exercício 10.6

$$F(z) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K} = 0z^{-0} + 0{,}25z^{-1} + 0{,}5z^{-2} + 0{,}75z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} + z^{-6} + \dots$$

$$= \frac{0{,}25}{z} + \frac{0{,}5}{z^2} + \frac{0{,}75}{z^3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \dots$$

$$= \frac{0{,}25z^2 + 0{,}5z + 0{,}75}{z^3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \dots$$

Sequencia $\begin{cases} F_1(z) = z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} + \cdots \\ z F_1(z) = z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \cdots \end{cases}$

$F_1(z)(z-1) = z^{-3}$ $\quad\therefore\quad$ $F_1(z) = \dfrac{z^{-3}}{(z-1)}$

$$\therefore \boxed{F(z) = \frac{0{,}25z^2 + 0{,}5z + 0{,}75}{z^3} + \frac{z^{-3}}{(z-1)}}$$

Exercicio 10.7)

$$Y(z) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K} = 1z^{-0} + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}$$

$$Y(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3} \quad (\text{Saída})$$

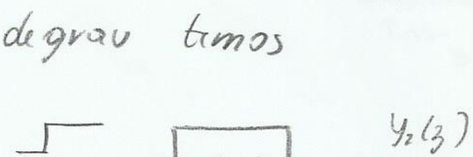
A entrada de um impulso unitário $\rightarrow$ $U(z) = 1$

Para entrada - degrau unitário $\rightarrow$ $U(z) = \dfrac{z}{z-1}$

Função de transferência para um impulso na entrada:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3}$$

Para degrau temos



$G(z) = \dfrac{Y_2(z)}{U_d(z)}$ $\quad\therefore\quad$ $Y_2(z) = G(z) U_d(z)$

$$Y(z) = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z}{z^4 - z^3} = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}$$

$$
\begin{array}{l|l}
1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} & 1 - z^{-1} \\ \hline
-1 + z^{-1} & 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 4z^{-4} \\ \hline
2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} & \\
-2z^{-1} + 2z^{-2} & \\ \hline
3z^{-2} + z^{-3} & \\
-3z^{-2} + 3z^{-3} & \\ \hline
4z^{-3} & \\
-4z^{-3} + 4z^{-4} & \\ \hline
4z^{-4} & \\
-4z^{-4} + 4z^{-5} & \\ \hline
4z^{-5} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 + z^2 + z + 1 & z^3 + z^2 \\ \hline
z + 1 & 1 + z^{-2} \\
z + z^0 & \\ \hline
0. &
\end{array}
$$

Resolução do Professor esta errada.

Sabendo que $F(z) = \sum_{K=0}^{\infty} f(KT) z^{-K}$, Portanto,

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

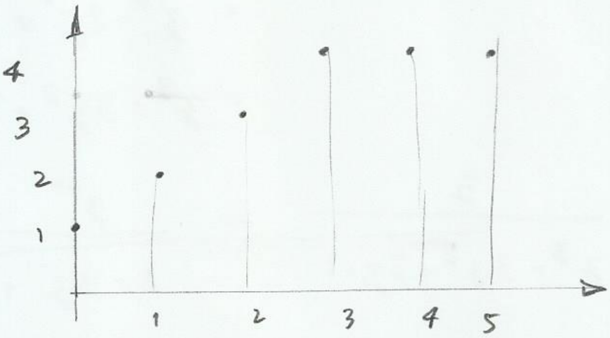
$f(2) = 3$

$f(3) = 4$

$f(4) = 4$

$f(5) = 4$

$\dots$



Exercício 10.8) $y(K+2) - 1{,}3y(K+1) + 0{,}4y(K) = u(K)$, com $y(0) = y(1) = 0$

$u(K)$: Degrau unitário $\therefore U(z) = \dfrac{z}{z-1}$

Lembrando que: $Z[f(K+n)] = z^n \left(F(z) - \sum_{K=0}^{n-1} f(K) z^{-K} \right)$

A transformada Z da expressão:

$$z^2\left(Y(z) - y(0)z^{-0} - y(1)z^{-1}\right) - 1{,}3\,z\left(Y(z) - y(0)z^{-0}\right) + 0{,}4\,Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

Como $y(0) = y(1) = 0$

$$z^2 Y(z) - 1{,}3\,z\,Y(z) + 0{,}4\,Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)\left(z^2-1{,}3z+0{,}4\right) = \frac{z}{z-1}$$

Portanto: $$Y(z) = \frac{z}{(z^2-1{,}3z+0{,}4)(z-1)}$$

b) Teorema do valor final

$$\lim_{K\to\infty} f(K) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z) = \lim_{z\to 1}\left[\left(\frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\right)\frac{\cancel{z}}{(z^2-1{,}3z+0{,}4)\cancel{(z-1)}}\right]$$

$$\therefore \lim_{K\to\infty} f(K) = 10$$

Exercício 10.9)

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^3} \quad ; \quad (z-1)^3 = (z^2-2z+1)(z-1)$$
$$= z^3-2z^2+z-z^2+2z-1$$
$$= z^3-3z^2+3z-1$$

$$\therefore F(z) = \frac{z}{z^3-3z^2+3z-1} = \frac{z^{-2}}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}$$

$$\begin{array}{l|l}
z^{-2} & 1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3} \\ \hline
-z^{-2}+3z^{-3}-3z^{-4}+z^{-5} & z^{-2}+3z^{-3}+6z^{-4}+10z^{-5} \\ \hline
3z^{-3}-3z^{-4}+z^{-5} & \\
-3z^{-3}+9z^{-4}-9z^{-5}+3z^{-6} & \\ \hline
6z^{-4}-8z^{-5}+3z^{-6} & \\
-6z^{-4}+18z^{-5}-18z^{-6}+6z^{-7} & \\ \hline
10z^{-5}-15z^{-6}+6z^{-7} & \\
-10z^{-5}+30z^{-5}-30z^{-7}+30z^{-8} & \\ \hline
15z^{-5}-24z^{-7}+30z^{-8} &
\end{array}$$

$\therefore$ Portanto

$f(0)=0$ $\quad f(4)=6$

$f(1)=0$ $\quad f(5)=10$

$f(2)=1$

$f(3)=3$

Mapeamento "plano s" e "plano z"

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,\mathcal{L}[\delta(t-kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

$$u(kT) \rightarrow \boxed{D/A \xrightarrow{u(t)} \text{Processo} \xrightarrow{y(t)} A/D} \rightarrow y(kT)$$

$$U(z) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow Y(z)$$

Para $U(z)$ um impulso unitário. $(U(z) = 1)$

$$Z[u(t)] = U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}\,G(s)$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)e^{-sT}}{s} \qquad Y(s) = \frac{G(s)(1 - e^{-sT})}{s}$$

A Transformada Z de $Y(s)$

$$Y(z) = Z[Y(s)] = Z\left[\frac{G(s)(1 - e^{-sT})}{s}\right]$$

$$Y(z) = (1 - z^{-1})\,Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Para $U(z) = 1$

Exemplo 11.2

Processo $\dfrac{1}{s+1}$ $\quad u(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s+1}} \longrightarrow y(t)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) \times Z\left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) \times Z\left[\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) \times \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right)$$

$$= 1 - \frac{z-1}{z-e^{-T}}$$

$$= \frac{z - e^{-T} - z + 1}{z - e^{-T}}$$

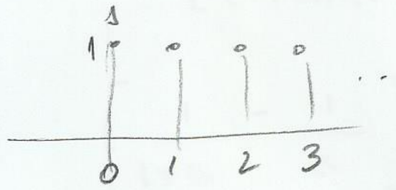
$$\boxed{= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}}$$

Análise de Malha Fechada

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)H(z)}{1 + G_c(z)H(z)}}$$

Exemplo 11.3

$$G(z) = \frac{z}{z-1}$$



Resposta Impulsiva

$z = 1$

(Portanto, marginalmente estável)

Exemplo 11.5

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2 - 1{,}8z + 1{,}62}$$

$$z^2 - 1{,}8z + 1{,}62 = 0$$

$$z = \frac{1{,}8 \pm \sqrt{-3{,}24}}{2} \begin{cases} z_1 = 0{,}9 + j0{,}9 \\ z_2 = 0{,}9 - j0{,}9 \end{cases}$$

$|z_1| < 1$ ✗

$|z_2| < 1$ ✗

Portanto é instável.

Critério de Jury

Através da equação característica $D(z) = 0$

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots a_n \qquad a_0 > 0$$

	z^0	z^1	z^2	$\dots$	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0
4	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-1}
5					

1) $|a_n| < a_0$

2) $D(z)|_{z=1} > 0$

3) $D(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & n \text{ par} \\ < 0 & n \text{ ímpar} \end{cases}$

4) $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

Exercício 11.1

Processo $\xrightarrow{u(t)} \dfrac{1}{s+1} \xrightarrow{y(t)}$

$$H(z) = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right) \quad ; \quad 1-z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

$$= 1 - \frac{(z-1)}{z-e^{-T}} = \frac{z-e^{-T}-z+1}{z-e^{-T}} \quad \therefore \quad H(z) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

Controlador x Processo $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)\left(\dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)$

$$\frac{Y(z)}{R(t)} = \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)}{1 + \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right)}$$

$$= \frac{z - ze^{-T}}{z^2 - ze^{-T} - z + e^{-T} + z - ze^{-T}} = \frac{z - ze^{-T}}{z^2 - 2ze^{-T} + e^{-T}}$$

Para $T = 0{,}1\,s$

$$\frac{H(z)}{R(z)} = \frac{0{,}095\,z}{z^2 - 1{,}866\,z + 0{,}905} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{H(z)}{R(z)} = \frac{0{,}095\,z^{-1}}{1 - 1{,}866\,z^{-1} + 0{,}905\,z^{-2}}}$$

Exercício 11.2)

$$G(z) = \frac{z - 0{,}2}{z^3 + 2{,}1z^2 + 2{,}08z + 0{,}64}$$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0,64	2,08	2,1	1
2	1	2,1	2,08	0,64
3	b_{n-1} -0,5904	-0,769	-0,736	
4	b_0 -0,736	-0,769	-0,5904	
5	-0,892	-0,112		
6	-0,112	-0,892		

1) $|a_n| < a_0$

$a_3 < a_0$

$0{,}64 < 1$ ✓

2) $D(z)\big|_{z=1} > 0$

$D(1) = 0{,}137 > 0$ ✓

3) $D(z)\big|_{z=-1} = 3{,}53 > 0$ ✓

4) $|b_{m-1}| > |b_0|$ ✗

Instável

Exercício 11.4)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s^2(s+2)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{+0{,}5}{s^2} - \frac{0{,}25}{s} \quad \frac{+0{,}25}{s+2}\right]$$

$a_1 \quad a_2$

$$b_1 = \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^0}{ds^0}\left(\frac{1}{s+2}\right)\Big|_{s=0}$$

$$b_2 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)\Big|_{s=0} = 1 \cdot (s+2)^{-2} = \frac{-1}{(s+2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$H(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{0{,}5\,Tz}{(z-1)^2} - \frac{0{,}25\,z}{(z-1)} + \frac{0{,}25\,z}{(z - e^{-2T})}\right)$$

= Para $T = 1s$ temos

$$H(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{0{,}5z}{(z-1)^2} - \frac{0{,}25z}{(z-1)} + \frac{0{,}25z}{z - 0{,}135}\right)$$

Portanto, $H(z) = \dfrac{0{,}2838z + 0{,}1485}{z^2 - 1{,}1353z + 0{,}1353}$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K\,H(z)}{1 + K\,H(z)} = \frac{K(0{,}2838z + 0{,}1485)}{z^2 + (0{,}2838K - 1{,}1353)z + 0{,}1353 + 0{,}1485K}$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 0{,}2838K - 1{,}1353$ $\qquad |a_n| < |a_0|$

$a_2 = 0{,}1485K + 0{,}1353$

$|a_2| < a_0 \qquad |0{,}1485K + 0{,}1353| < 1$

$$-1 < 0{,}1485K + 0{,}1353 < 1$$

$$-1{,}1353 < 0{,}1485K < 0{,}8647$$

$$-7{,}645 < K < 5{,}823$$

$D(z)|_{z=1} > 0$

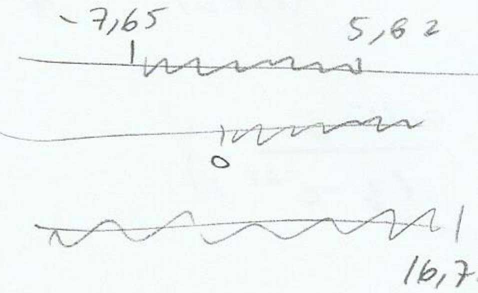
$$1 + 0{,}2838K - 1{,}1353 + 0{,}1353 + 0{,}1485K > 0$$

$\therefore K > \dfrac{0}{0{,}423} \quad \therefore K > 0$

$D(z)|_{z=-1} \Big\{ > 0 \quad n = 2$

$$1 - 0{,}2838K + 1{,}1353 + 0{,}1353 + 0{,}1485K > 0$$

$2{,}2706 - 0{,}1353K > 0 \qquad K < 16{,}78$



$\boxed{\therefore 0 < K < 5{,}82}$

Exercício 11.5

$$D(z) = z^4 + 1{,}8z^3 + 0{,}47z^2 - 0{,}45z - 0{,}18 = 0$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1{,}8 \quad a_2 = 0{,}47 \quad a_3 = -0{,}45 \quad a_4 = -0{,}18$

$|a_4| < a_0 \qquad |-0{,}18| < 1$ ✓

$D(z)\big|_{z=1} > 0 \qquad 2{,}67 > 0$ ✓

$D(z)\big|_{z=-1} > 0 \qquad -0{,}06 > 0$ ✗

Instável

Exercícios Propostos

Exercício 11.6

Processo: $\dfrac{s+a}{s+b}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{s+a}{s(s+b)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{a/b}{s} + \frac{\left(\frac{-b+a}{-b}\right)}{s+b}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{\frac{a}{b}}{s} + \frac{1}{s+b} - \frac{a/b}{s+b}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) \times \left(\frac{a}{b}\,\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-bT}} - \frac{a}{b}\,\frac{z}{z-e^{-bT}}\right)$$

$$\boxed{= \frac{a}{b} + \frac{z-1}{z-e^{-aT}} - \frac{a(z-1)}{b(z-e^{-bT})}}$$

Exercício 11.7)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1-z^{-1})\, Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{(s+1)}\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{(1-1)!}\frac{d^0}{ds^0}\left(\frac{1}{s+1}\right)\Big|_{s=0} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)\Big|_{s=0} = -1\times(s+1)^{-2}\Big|_{s=0} = \frac{-1}{(s+1)^2}\Big|_{s=0} = -1$$

$$a_3 = 1$$

$$\therefore \quad H(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right]$$

$$H(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)} + \frac{z}{z-e^{-1}}\right)$$

$$H(z) = \frac{1}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{2-z}{z-1} + \frac{z-1}{z-0{,}368} = \frac{(2-z)(z-0{,}368)+(z-1)^2}{z^2-1{,}368z+0{,}368}$$

$$= \frac{\cancel{z^2} \cancel{-2z}+1 \cancel{+2z} - 0{,}736 \cancel{-z^2} + 0{,}368z}{z^2-1{,}368z+0{,}368}$$

$$= \frac{0{,}368z + 0{,}2642}{z^2-1{,}368z+0{,}368}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,368z + 0,2642}{z^2 - 1,368z + 0,368 + 0,368z + 0,2642}$$

$$= \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}$$

— // —

Caso K não seja Unitário como no exemplo acima

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(0,368z + 0,2642)K}{z^2 - 1,368z + 0,368 + (0,368z + 0,2642)K}$$

$$= \frac{(0,368z + 0,2642)K}{z^2 - (1,368 - 0,368K)z + 0,368 + 0,2642K}$$

Para $K = 1 \rightarrow \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}$

Para um 5 na entrada $R(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)} \frac{(0,368z + 0,264)}{(z^2 - z + 0,632)}$$

$$= \frac{0,368z^2 + 0,264z}{z^3 - z^2 + 0,632z - z^2 + z - 0,632}$$

$$= \frac{0,368z^2 + 0,264z}{z^3 - 2z^2 + 1,632z - 0,632}$$

$$= \frac{0,368z^{-1} + 0,264z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1,632z^{-2} - 0,632z^{-3}}$$

$y(k) = 2y(k-1) - 1,632y(k-2) + 0,632y(k-3) + 0,368r(k-1) + 0,264r(k-2)$

$y(0) = 0$

$y(1) =$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0{,}0952\, z^{-1}}{1 - 1{,}8097 z^{-1} + 0{,}9048 z^{-2}}$$

$$y(kT) = 1{,}8097\, y[(k-1)T] - 0{,}9048\, y[(k-2)T] + 0{,}0952\, R[[k-1]]$$

$y(0) = 1{,}8097\, y(-1) - 0{,}9048\, y(-2) + 0{,}0952\, r(-1) = 0$

$y(1) = 1{,}8097\, y(0) - 0{,}9048\, y(-1) + 0{,}0952\, r(0) = 0{,}0952$

$y(2) = 1{,}8097\, y(1) - 0{,}9048\, y(0) + 0{,}0952\, r(1) = 0{,}267$

$y(3) = 1{,}8097\, y(2) - 0{,}9048\, y(1) + 0{,}0952\, r(2) = 0{,}4922$

$y(4) = 1{,}8097\, y(3) - 0{,}9048\, y(2) + 0{,}0952\, r(3) = 0{,}7444$

$y(5) = 1{,}8097\, y(4) - 0{,}9048\, y(3) + 0{,}0952\, r(4) = 0{,}9971$

$y(6) = 1{,}8097\, y(5) - 0{,}9048\, y(4) + 0{,}0952\, r(5) = 1{,}226$

$y(7) = 1{,}8097\, y(6) - 0{,}9048\, y(5) + 0{,}0952\, r(6) = 1{,}412$

$y(8) = 1{,}8097\, y(7) - 0{,}9048\, y(6) + 0{,}0952\, r(7) =$

$y(9) = 1{,}8097\, y(8) - 0{,}9048\, y(7) + 0{,}0952\, r(8) =$

$y(10) = 1{,}8097\, y(9) - 0{,}9048\, y(8) + 0{,}0952\, r(9) =$