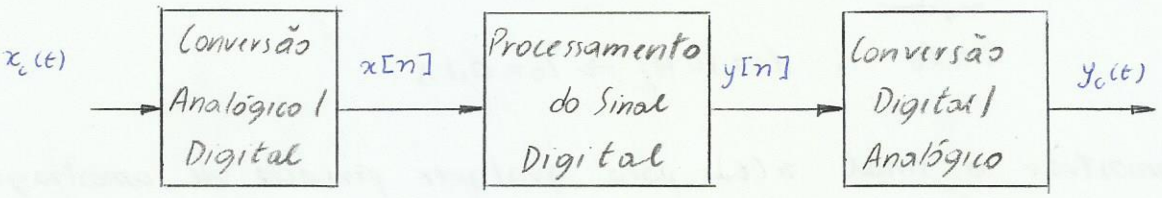
Introdução ao Processamento Digital de Sinais

Filosofia { Sinais são analógicos; podem ser obtidos para qualquer instante do tempo. Pois é um sinal contínuo.

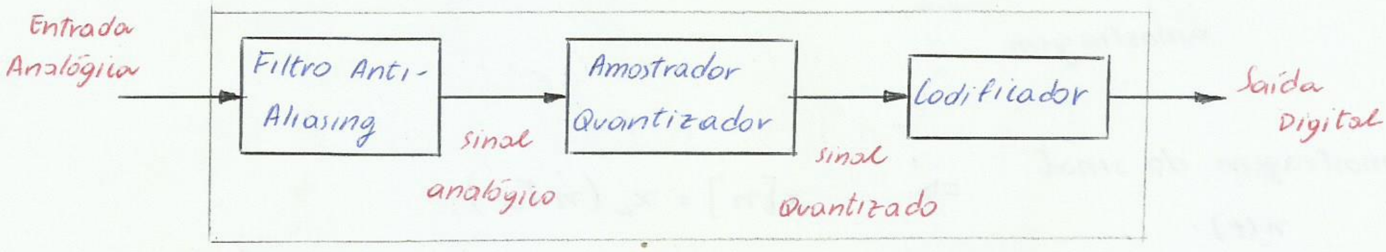
Sinais ANALÓGICOS não podem ser tratados por computadores. Portanto, precisamos DISCRETIZÁ-LO.

DISCRETIZAÇÃO do sinal significa obter uma sequência de AMOSTRAS para instantes específicos do tempo.



O ~~processamento~~ processo de discretização de um sinal também é chamado de amostragem.

Conversão Analógica Digital



Sinais Discretos

Um sinal discreto é representado por uma sequência numérica, que pode ser vista como uma função contínua de uma variável discreta.

$$\boxed{x[n] = x_c(nT_a)}$$

$x_c(t)$: Função contínua no tempo

T_a : Período de Amostragem

$f_a = \frac{1}{T_a}$: Frequência de Amostragem

"Período de amostragem T_a é o intervalo de tempo que é obtido a amplitude do sinal."

Teorema de Nyquist

Um sinal $x(t)$ de frequência f_0 pode ser reconstruído a partir de suas amostras $x[n]$ se a frequência de amostragem $f_s = \frac{1}{T_s}$ for maior que duas vezes a frequência do sinal.

$\boxed{f_s \geq 2.f_0}$ Caso contrário tem-se "aliasing"

Filtro anti-aliasing é um filtro passa baixa analógico, utilizado para remover do sinal de entrada os componentes de frequências superiores a taxa de Nyquist ($f_s/2$)

EXEMPLO 1.5)

Sinal $x(t) = \cos(\underbrace{2\pi\, 10}_{2\pi f_0} t)$

$\therefore f_0 = 10\,Hz \rightarrow T_0 = 0{,}1\,s$

Podemos amostrar o sinal $x(t)$ para qualquer período de amostragem T_a com $f_a = \frac{1}{T_a}$. Porém se deseja que este sinal seja reconstruído, temos que usar o teorema de Nyquist.

$f_s \geq 2 f_0$ $\therefore$ $f_s \geq 20\,Hz$

↳ frequência de amostragem

Amostragem do sinal $x(t)$ $\Rightarrow$ $x[n] = x_c(n T_a)$

Podemos relacionar o espectro da sequência de tempo discreto com o sinal amostrado

$x(t) = \cos(\underbrace{2\pi f_0}_{\Omega} t)$

Sendo w o espectro da sequência no tempo discreto

$x[n] = \cos(w n)$

Portanto $w = \Omega T_a$.

$x[n] = \cos(\Omega T_a n)$

$T_a = \frac{1}{f_s}$; $\Omega = 2\pi f_0$

$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi f_0}{f_s} n\right)$

(a) Para frequência de amostragem $f_s = f_{smin}$

De acordo com Teorema de Nyquist $\Rightarrow f_s \geq 2 f_0$

Para f_{smin} temos $f_s = 2f_0$

$\therefore f_s = 20\ Hz$

$x(t) = \cos(\underbrace{2\pi 10}_{\Omega = 2\pi f_0} t)$

$x[n] = x(nTa) = \cos(2\pi . 10\, nTa)$

$Ta = \frac{1}{f_s} \therefore x[n] = \cos\left(\frac{2\pi . 10}{20} n\right)$

$\therefore \boxed{x[n] = \cos(\pi n)}$

Para $f_s = 20 Hz \rightarrow N = 2$

(b) Para frequência de amostragem $f_s = 2 f_{s_{min}}$

$\therefore f_s = 40\ Hz$

$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi . 10}{40} n\right)$

$\therefore \boxed{x[n] = \cos(0{,}5\pi n)}$

Para $f_s = 40 Hz \Rightarrow N = 4$

(c) Para $f_s = 4 f_{smin} \rightarrow f_s = 80 Hz$

$\therefore \boxed{x[n] = \cos(0{,}25\pi n)}$

Para $f_s = 80Hz \rightarrow N = 8$

A relação do <u>numero de amostras por período</u> corresponde a relação entre a frequência f_0 do sinal com a frequencia de amostragem.

$$\boxed{N = \frac{f_s}{f_0}}$$

SINAIS QUANTIZADOS e CODIFICADOS

Tipos de Sinais $\begin{cases} \text{Contínuo} \\ \text{Discreto} \\ \text{Digital} \end{cases}$

Lembrando que a Conversão de A/D $\boxed{x[n] = x(nT_s)}$

Amostragem: Contínuo $\rightarrow$ Discreto

Quantização: Discreto $\rightarrow$ Digital (Existe uma precisão, resolução)

ERRO = Quantizado − Amostrado

$$ERRO_{MAX} = \frac{Precisão}{2}$$

LABORATÓRIO : Aula 2

Amostragem de Sinais Analógicos

$x(t) \to$ AMOSTRADOR $\to x_s[n] \to$ QUANTIZADOR $\to x_q[n] \to$ CODIFICADOR $\to x_{cod}[n]$

Amostragem: (Multiplicação do sinal $x(t)$ por um trem de impulsos com espaçamento de T_s)

$$x_s(t) = x(t) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_s)$$

Quantização e codificação Seria o "arredondamento" das amostras para níveis de amplitudes pré-determinados.

Exercícios de fixação

(Exercício 1)

$x(t) = \sin(2\pi f t)$ para $100\ Hz \leq f \leq 3000\ Hz$ com certa duração T_{total}

Sinal : $x(t) = \sin(\underbrace{2\pi f}_{\Omega = 2\pi f}\ t)$

Teorema de Nyquist : $f_s \geq 2f_0$

$\therefore f_s \geq 2f$ $\Big\{$ f_s: frequencia de amostragem

Sinal amostrado

$x[n] = x(nT)$

$= \sin(2\pi f . nT_0)$

$= \sin\left(\overrightarrow{\dfrac{2\pi f}{f_s} . n}\right)$ $100 \leq f \leq 3000$

Quanto $\uparrow f$ Agudo

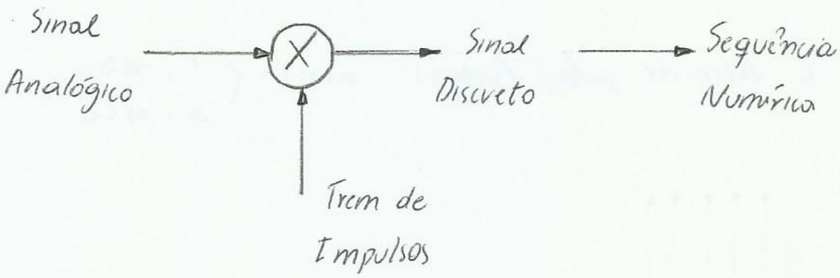
$\downarrow f$ Grave

(Exercício 2)

5 tons (1s cada) { 493,9 554,4 440 220 e 329,6 Hz }

Sinais Discretos no Tempo

Lembrete do processo de amostragem



Sinal Discreto

$x[n] = x_c(nT_s)$

Operações Algébricas

Soma de duas sequências: $w[n] = x[n] + y[n]$

Soma a amplitude dos sinais $x[n]$ e $y[n]$ para cada amostra n

Multiplicação de duas sequências: $w[n] = x[n] \cdot y[n]$

Mudança de Escala

Amplitude: $y[n] = A \cdot x[n]$

Multiplica a amplitude por A de cada amostra n

Tempo: $y[n] = x[M \cdot n]$, $M \in \mathbb{Z}$

Deslocamento no tempo

$y[n] = x[n-K]$, $K \in \mathbb{Z}$

Diferenciação

$\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$ Estima a derivada de uma função contínua.

Sequências Básicas

Função Impulso

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 0 \\ 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$$

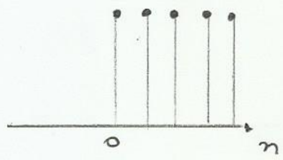
Sinal Atrasado: $x[n] = \delta[n-1]$

Sinal Adiantado: $x[n] = \delta[n+7]$

Função degrau

$$u[n] = \sum_{n_0=0}^{\infty} \delta[n-n_0]$$

É definida pela função $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$



Sequência exponencial

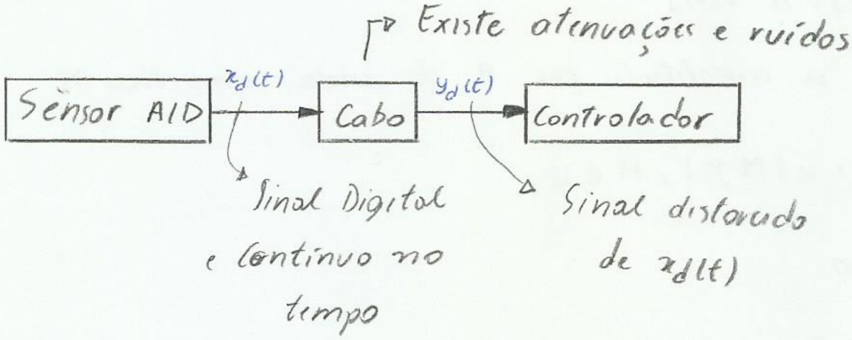
$$x[n] = A\alpha^n$$

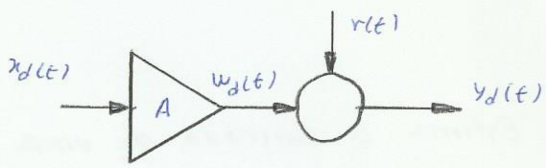
Sequencia (cos)senoidal

$$x[n] = A.\cos(\omega n + \theta), \quad \omega = \frac{\text{rads}}{\text{amostra}}$$

Laboratório Aula 3

Amostragem de Sinais Digitais





Processamento Digital de Sinais

Prof- Andréa Carvalho andreadc@fei.edu.br

- Discrete-time Signal → Oppenheim, A.V. e Shafer
- Introdução ao Processamento Digital de Sinais, Nalon, J.A
- The scientist and engineer's guide to Digital Signal Processing (www.DSPguide.com)

22/02/2016

Exemplo 1.2)

$x_c(t) = \cos(2\pi 10t)$ $F_s = 100\,Hz$

$f_0 = 10\,Hz \rightarrow T_0 = 1/f_0 = 1/10 \therefore T_0 = 0{,}1\,s$

$F_s = 100\,Hz \rightarrow T_s = 0{,}01\,s$

$\Big\}\; N = \frac{0{,}1}{0{,}01} = 10$ amostras

Para encontrar a amplitude para as amostras

$x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Para $t = nT_s$

$x[nT_s] = \cos(2\pi f_0 . nT_s)$ logo

$\therefore \boxed{x[n] = \cos(0{,}2\pi n)}$

$x[nT_s] = \cos\left(\frac{2\pi f_0 . n}{f_s}\right)$; $\Omega = 2\pi f_0$ [Rad/s]

ω

$\therefore x[n] = \cos(\omega n)$; $\omega = \frac{2\pi f_0}{f_s}$; [Rad/amostra]

Exemplo 1.3)

$x_c(t) = \cos(2\pi 50t)$ e $F_s = 100\,Hz$

$F_0 = 50\,Hz \therefore T_0 = 0{,}02\,s$

$F_s = 100\,Hz \therefore T_s = 0{,}01\,s$

$\Big\}\; N = 2$ amostras

Amostrando: $x[nT] = \cos(2\pi 50 nT)$

$= \cos\left(\frac{2\pi 50 n}{f_s}\right)$; $f_s = 100$

$\therefore \boxed{x[n] = \cos(\pi n)}$

Exemplo 1.4)

$x_c(t) = \cos(2\pi 90 t)$ e $F_s = 100\ Hz$

$\begin{cases} \omega = 1{,}8\pi \text{ rad/amostra} \\ \Omega = 2\pi 90 \text{ rad/s} \end{cases}$

$f_0 = 90\ Hz \rightarrow T_0 = 0{,}011\ s$

$f_s = 100\ Hz \rightarrow T_s = 0{,}01\ s$

$\}$ $N = 1{,}11$ amostras

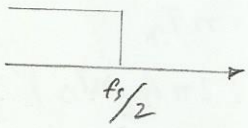
$x[nT] = \cos(2\pi 90 n T_s]$

$= \cos\left(\dfrac{2\pi 90 n}{T_s}\right)$; Para $T_s = 0{,}01$, temos: $\boxed{x[n] = \cos(1{,}8\pi n)}$ Sinal Amostrado

Teorema de Nyquist $\boxed{f_s \geq 2 f_0}$ Pode ser recuperado, Caso contrário tem-se "aliasing"

Um sinal $x(t)$ de frequência f_0 pode ser reconstruído a partir de suas amostras $x[n]$ se a frequência de amostragem $f_s = \frac{1}{T_s}$ for maior que duas vezes a frequência do sinal.

Filtro Anti-aliasing é um filtro passa baixa analógico, utilizado para remover do sinal de entrada os componentes de frequências superiores a taxa de Nyquist ($f_s/2$)



EXEMPLO 1.5)

$\boxed{\omega = \frac{2\pi f_0}{f_s}\ ;\ N = \frac{f_s}{f_0}\ \therefore\ \omega = \frac{2\pi}{N}}$

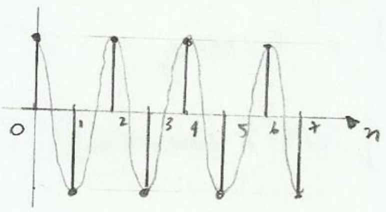
$x(t) = \cos(2\pi 10 t)$

$f_0 = 10\ Hz \rightarrow T_0 = 0{,}1\ s$

A frequência mínima ($f_{s_{min}}$): $f_{s_{min}} \geq 20\ Hz$ (Teorema de Nyquist)

$x[n] = \cos\left(\overbrace{\frac{2\pi \cdot f_0}{f_s}}^{\omega} n\right)$

$\boxed{x[n] = \cos(\pi n)}$

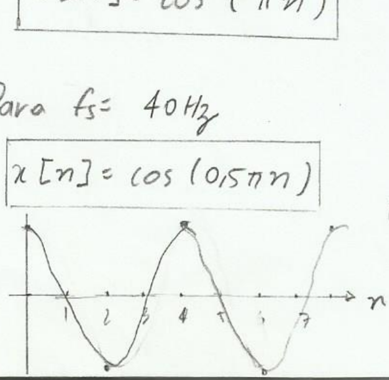


$N = 2$

Para $f_s = 40\ Hz$

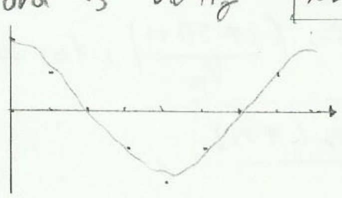
$\boxed{x[n] = \cos(0{,}5\pi n)}$

$N = 4$



Para $f_s = 80\ Hz$ $\boxed{x[n] = \cos(0{,}25\pi)}$

$N = 8$



Amostragem : Contínuo → Discreto

Quantização: Discreto → Digital

(Existe uma precisão, resolução)

ERRO = Quantizado - Amostrado

$$\boxed{ERRO_{max} = \frac{Precisão}{2}}$$

EXEMPLO 1.6)

Para $\Delta = 0{,}5\,V \to erro = 0{,}25\,V$

-1,0	110	3bits
-0,5	101	
0	000	
0,5	001	
1,0	010	

Para $\Delta = 1{,}0\,V \to erro = 0{,}5\,V$

-1	2bits	11
0		00
1		01

	2 bits $\Delta=1{,}0V$	3 bits $\Delta=0{,}5V$
f_s = 20 amostras/s	40 bits	60 bits
f_s = 40 amostras/s	80 bits	120 bits
f_s = 80 amostras/s	160 bits	240 bits

{ 1bits → 1 s }

(Memória esta relacionada ao numero de amostras e precisão)

53 → D

2008 - B

2011 - B

15 → B

Capitulo 4

6 prm

29/02/2016

Exemplo 2.1)

$x[n] =$

(a)

Impulso 1: esta em -2 $\quad -\delta[n-2]$

" 2: " " 0 $\quad \delta[n]$

" 3: " " -1 $\quad -\delta[n+3]$

" 4: " " -1 $\quad \delta[n+6]$

" 5: " " 6

$x[n] = -\delta[n-2] + \delta[n] - \delta[n+3] + \delta[n+6]$

b) $x[n] = 7\delta[n+4] - 5\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n-2] + 2\delta[n-3] - \delta[n-6] + \delta[n-8]$

c) $x[n] = \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]$

Exemplo 2.2

$x[n] = -2\delta[n+2] - u[n+1] - u[n-2] + 4u[n-3]$

Exemplo 2.3

$x_c = \cos(2\pi 10 t)$

(a) $f_s = 40\,Hz$ $\quad w = \frac{2\pi f}{f_s} \quad w = \frac{2\pi K}{N}$

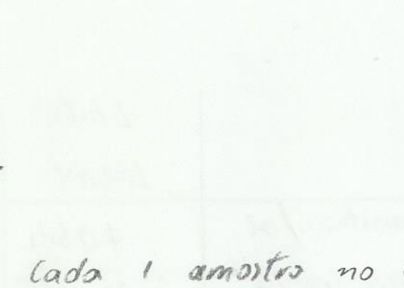
logo $w = \frac{2\pi 10}{40} \rightarrow w = \frac{2\pi}{4}$ Cada 1 amostra no tempo contínuo temos 4 amostras no sinal de tempo discreto

(b) $f_s = 25\,Hz$

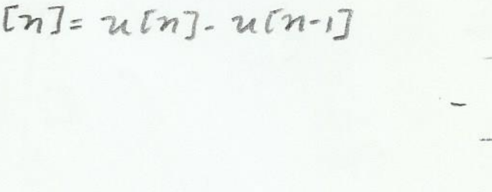
$w = \frac{2\pi 10}{25} = \frac{2\pi 2}{5}$ Cada 2 amostra tempo conti $\rightarrow$ 5 amostra discreto

EXERCÍCIOS

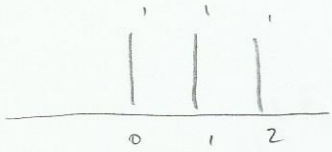
24) a) $x[n] = u[n] - u[n-1]$



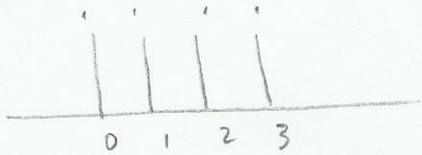
b) $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 0{,}5\delta[n-2]$



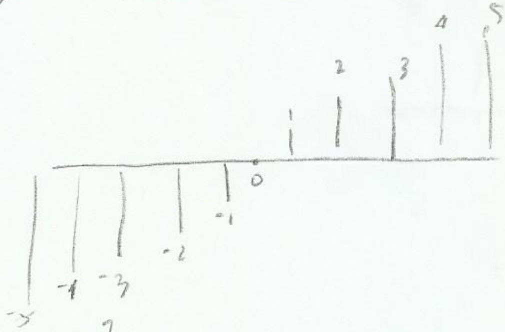
c) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$



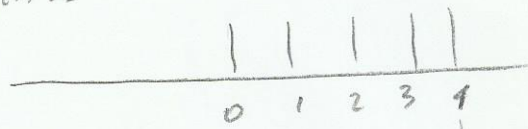
d) $x[n] = u[n] - u[n-3]$

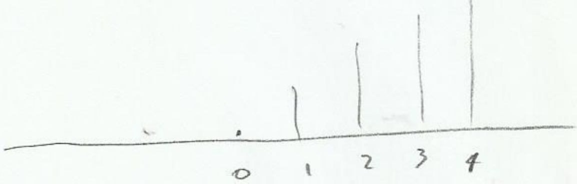


e) $x[n] = n(u[n] - u[n-5])$



$u[n] - u[n-5]$





f) $x[n] = u[-n]$

$x[0] = u[0] = 1$

$x[1] = u[-1] = 0$

$x[2] = u[-2] = 0$

$\vdots$

$x[n] = u[-n] = 0$

$x[-1] = u[1] = 1$

$x[-2] = u[2] = 1$

$\vdots$

$x[-n] = u[n] = 1$

g) $x[n] = u[-n-1]$

$x[0] = u[-1]$

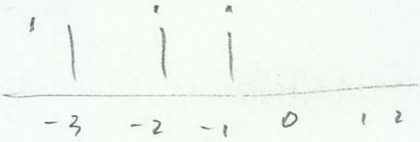
$x[1] = u[-2]$

$x[2] = u[-3]$

$x[-1] = u[0]$

$x[-2] = u[1]$

$x[-3] = u[2]$



h) $x[n] = u[-n+1]$

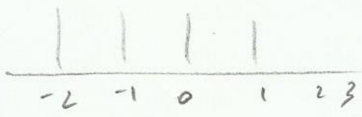
$x[0] = u[1]$

$x[1] = u[0]$

$x[2] = u[-1]$

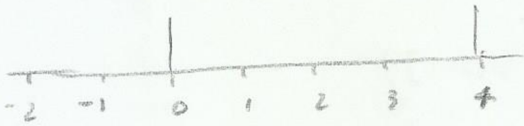
$x[-1] = u[2]$

$x[-2] = u[3]$



i) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-3)\right)$

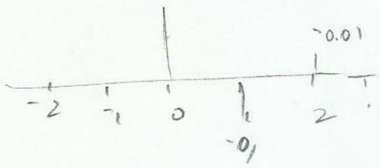
$\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-3)\right)$

j)

k)



Classificação de Sequências

Duração

Simetria

Periodicidade

Causalidade

Energia ou Potência

Periodicidade

Um sinal periódico é aquele que se repete de modo periódico com um período T(s) que equivale a N amostras.

$$x[n] = x[n-N]$$

Duração $\left\{ \begin{array}{l} \text{Finitos} \\ \text{Infinitos} \end{array} \right.$

Simetria $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pares} & x[-n] = x[n] \\ \text{Ímpares} & x[-n] = -x[n] \end{array} \right.$

Causalidade $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Causais} & n \geq 0 \\ \text{Anti-causais} & n < 0 \\ \text{Não causais} & \end{array} \right.$

Energia ou Potência $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Sinais de Energia} & 0 < E < \infty \\ \text{Sinais de Potência} & 0 < P < \infty \end{array} \right.$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

Não Periódico $P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n]$

Periódico $P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$

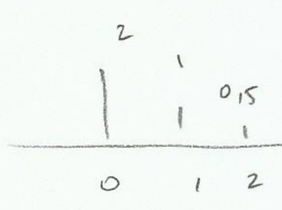
Exercícios

2.5 a) $x[n] = u[n] - u[n-1]$

$\delta[n]$

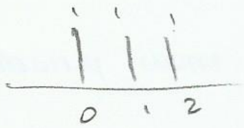
- Não Periódico
- Finito
- Simetria Par $(\therefore x[-0] \neq -x[0])$
- Causal
- Energia (1)

b) $x[n] = 2\delta[n] + 0{,}5\delta[n-2]$



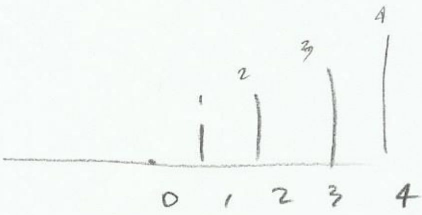
- Não Periódico
- Finito
- Não Simétrico
- Causal
- Energia (5,25)

c) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

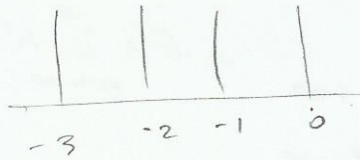


- Não Periódico
- Finito
- Não simétrico
- Causal
- Energia

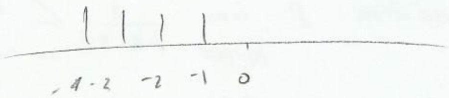
d) $x[n] = u[n] - u[n-3]$



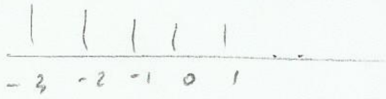
- Não Periódico
- Finito
- Não simétrico
- Causal
- Energia

e) 

NP, I, NS, NC, P

g) 

NP, I, NS, AC, P

h) 

NP, I, NS, NC, P

i) $\cos(w(n-3))$

$w = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi K}{N}$ 4

P(N=4), I, SI, NC, Pot

j)

k) 

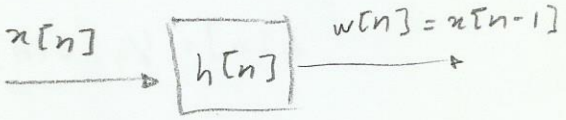
ÑP, I, NS, C, E

HW: Exercício 2.6

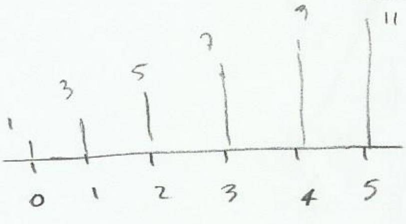
Sistema

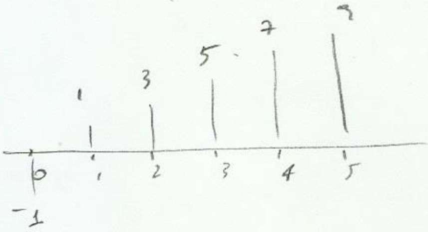
$$y[n] = H\{x[n]\}$$

Exemplo 3.1) Sistema Atrasador



$x[n] = 2n+1 \; - \boxed{z^{-1}} - \; w[n] = x[n-1]$





$$w[n] = x[n-1] = 2(n-1)+1 = 2n-1$$

Equação de diferenças

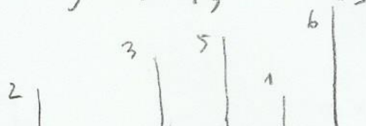
$$w[n] = x[n-1]$$

Resposta Impulsiva

$\delta[n] \; - \boxed{z^{-1}} - \; h[n] = \delta[n-1]$

Exemplo 3.2

$$y[n] = 1/3\,[x[n] + x[n-1] + x[n-2]]) \quad ? \quad ?$$



$y[0] = \cancel{\dfrac{x[0] + x[-1] + x[-2]}{}}$

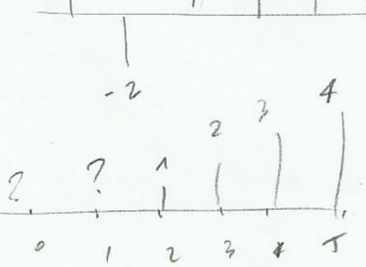
$y[1] = \cancel{\dfrac{x[1] + x[0] + x[-1]}{3}} \; ?$

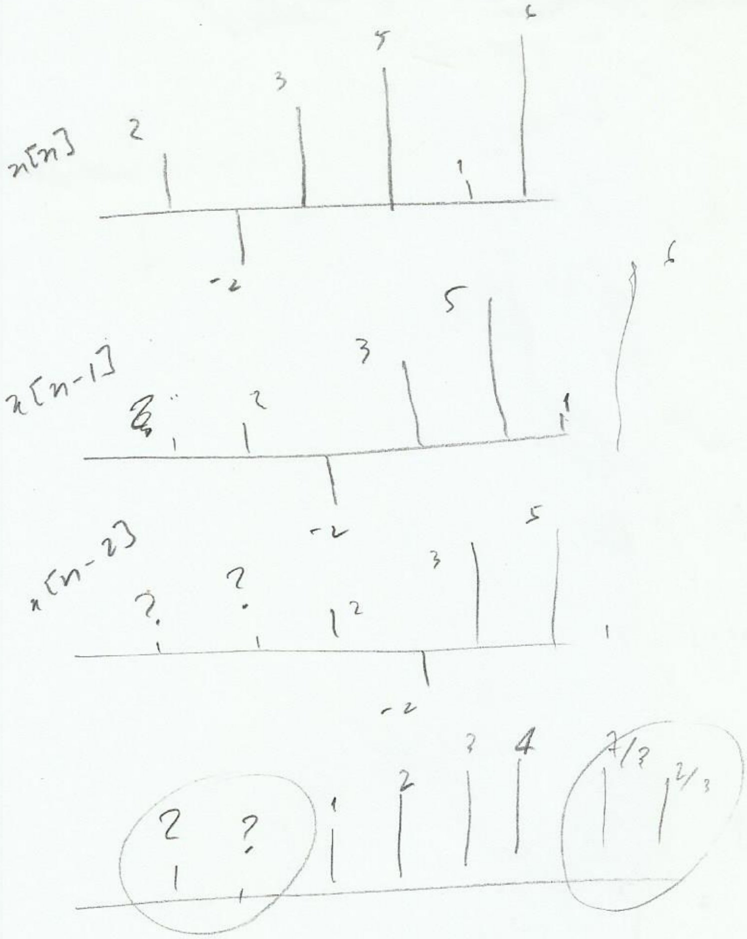
$y[2] = 3/3 = 1$

$y[3] = 2$

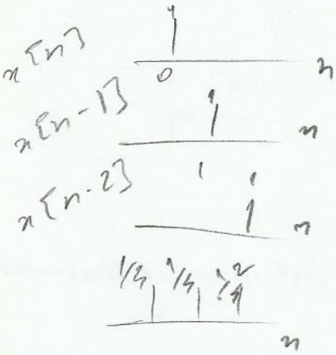
$y[4] = 3$

$y[5] = 4$

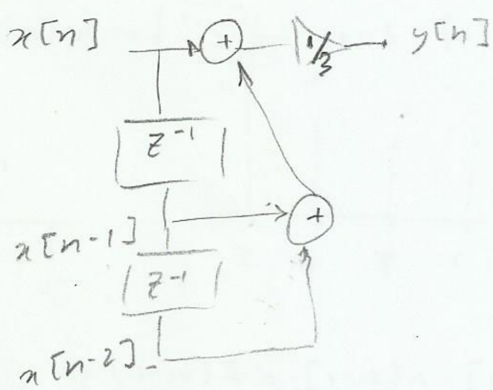




Resposta Impulsiva



$$h[n] = 1/3\,(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2])$$



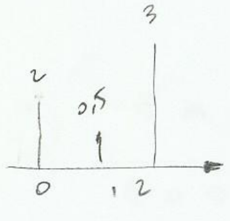
Exemplo 3.3)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

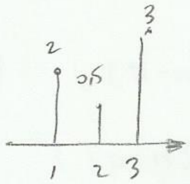
Exercícios de Fixação

3.12)

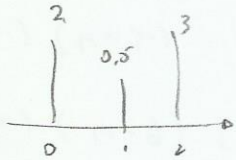
a)



b)



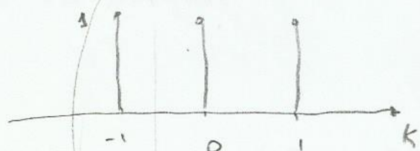
c)



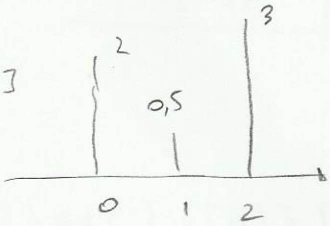
Convolução $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$

d)

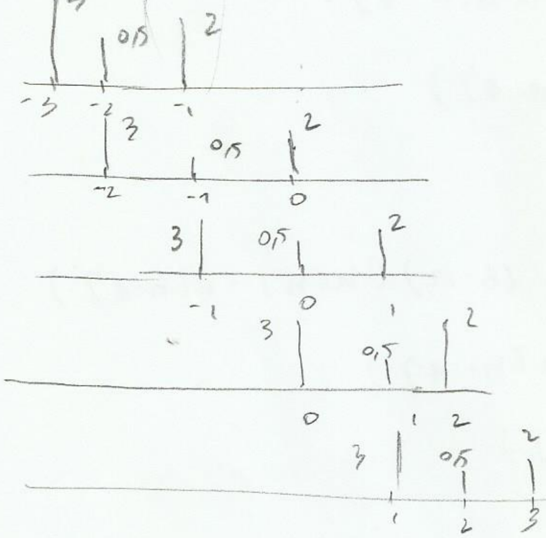
$x[k]$



$h[k]$



Causal: só tem uma saída quando tem uma entrada



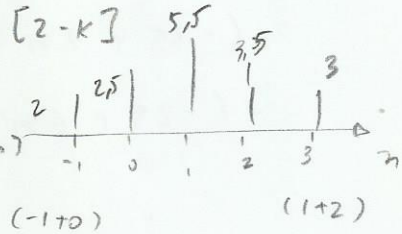
p/ $n=-1$ $\sum x[k]\,h[-1-k]$

p/ $n=0$ $\sum x[k]\,h[-k]$

p/ $n=1$ $\sum x[k]\,h[1-k]$

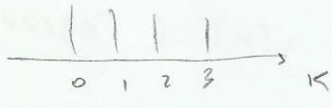
p/ $n=2$ $\sum x[k]\,h[2-k]$

p/ $n=3$ $\sum x[k]\,h[3-k]$

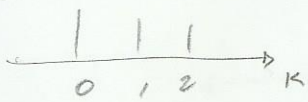


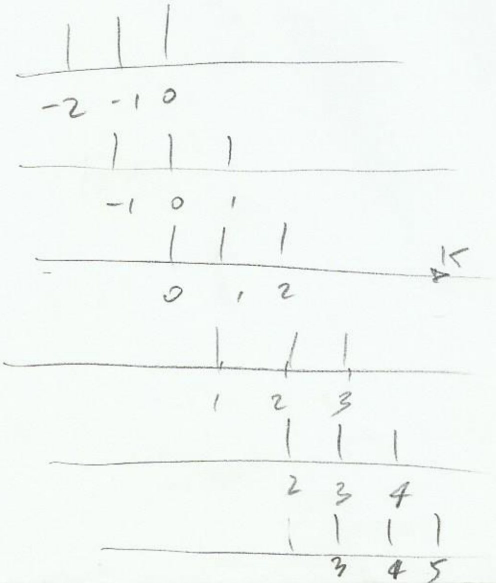
e)

$x[k]$



$h[k]$





p/ $n=0$ $\sum x[k]\,h[-k]$

p/ $n=1$ $\sum x[k]\,h[1-k]$

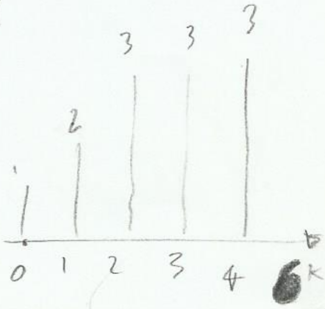
p/ $n=2$ $\sum x[k]\,h[2-k]$

p/ $n=3$ $\sum x[k]\,h[3-k]$

p/ $n=4$

p/ $n=5$

⋮



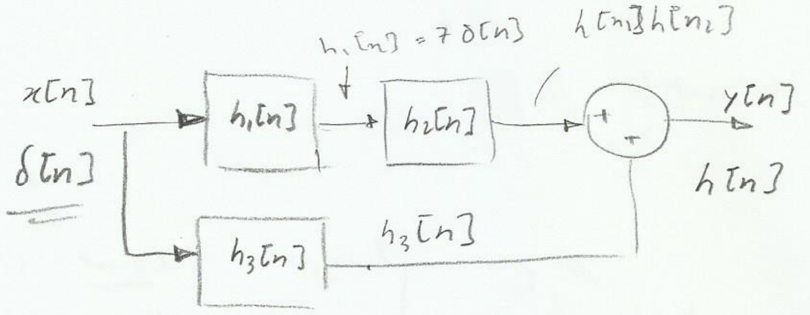
6

Exercício 3.14)

$h_1[n] = 7\delta[n]$

$h_2[n] = (-5+n)(u[n]-u[n-4])$ Vale de 0 a 3

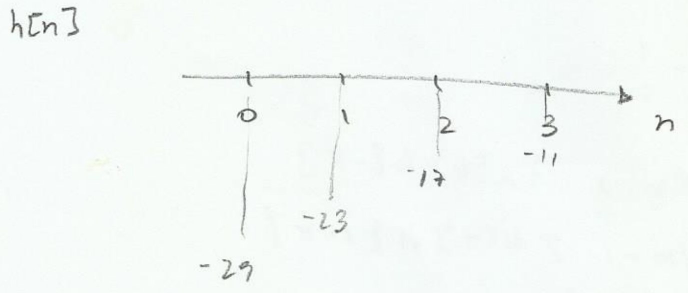
$h_3[n] = (6-n)(u[n]-u[n-4])$ Vale de 0 a 3



Resposta impulsiva: Saída quando tenho Impulso na entrada

$$h_1[n_2] * h[n_2] = 7\delta[n] * (-5+n)(u[n]-u[n-4])$$
$$= 7(-5+n)(u[n]-u[n-4])$$

$$y[n] = h_1[n_1] * h_2[n] + h_3[n]$$
$$= 7(-5+n)(u[n]-u[n-4]) + (6-n)(u[n]-u[n-4])$$
$$= (-35+7n+6-n)(u[n]-u[n-4])$$
$$= (-29+6n)(u[n]-u[n-4])$$



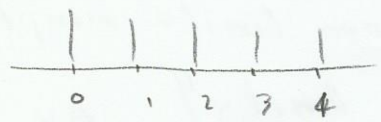
$h[n]$ (Impulsiva)

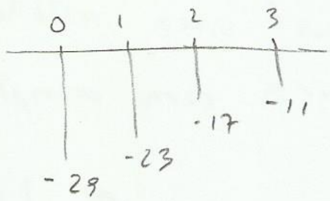
$s[n]$ (Degrau)

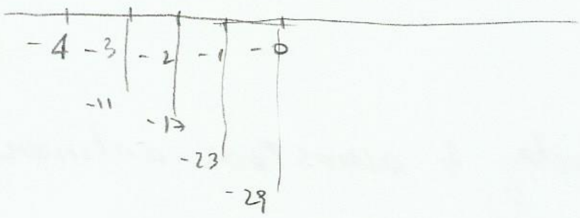
b)

$s[n] = h[n] * u[n]$

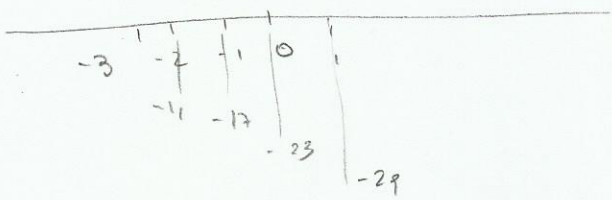
u(k)



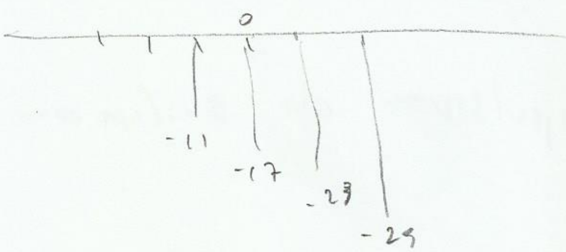




p/n=0

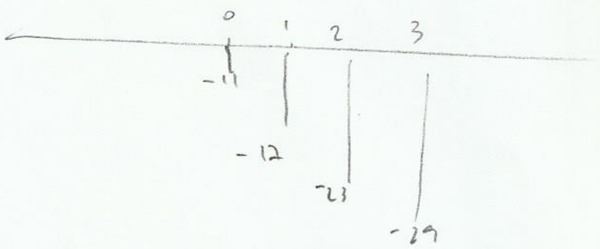


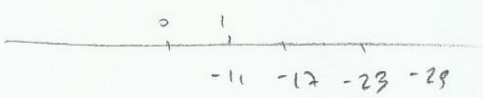
p/n=1

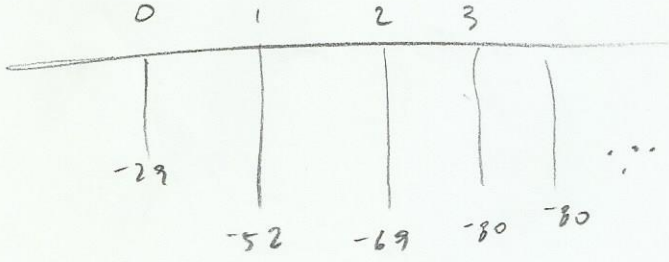


p/n= 2

p/n= 3







$$s[n] = \sum_{K=0}^{n} h[K]$$

Outra alternativa

c)

É causal. Valores para impulsiva são maiores que zero.

"Para ser estável uma entrada com finita amplitude, tem uma resposta com amplitude finita" ou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

Para o nosso sistema $\sum_{n \to \infty}^{\infty} |h[n]| = 80 < \infty$

∴ Estável

Tem memória pois é armazenado 4 amostras anteriores + a amostra atual.

Exercício 3.15)

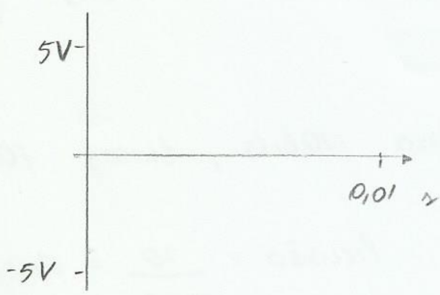
- Não linear
- Consigo a resposta impulsiva do sistema

Exercícios ENADE - PDS 01

$$\log_b a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$$

(1) ENADE 2005

- faixa de frequência: 0 a 100 Hz
- excursão de amplitude: -5V a 5V



Resolução = 50 mV

$\Delta_{amp} = 5-(-5) = 10V$ $\qquad \frac{\Delta amp}{resolução} = 200 \rightarrow$ 8 bits / $\rightarrow$ 1 amostra

$f_s \geq 2 f_0 \therefore f_s \geq 200 Hz$

$\downarrow$

$200 \frac{amostra}{s}$, logo $200 \frac{amostra}{s} \times \frac{8 bits}{amostra} \therefore \boxed{1600 \frac{bits}{amostra}}$

(2) ENADE 2008

Δt = 1 hora

faixa de áudio: 0 a 10 kHz

taxa de amostragem: $5 f_s$ ($f_s \geq 2 f_0$)

$Amplitude_{quant.}$ = 512 níveis

taxa de transferência: $4 \frac{Mbits}{s}$

Tempo de transferência?

$f_s \geq 20 kHz$

$5 f_s = 100 kHz$

512 níveis $\rightarrow$ 9 bits / 1 amostra

$\therefore$ taxa de amostragem $= 100 kHz = 100.10^3 \frac{amostra}{s} = 900.10^3 \frac{bits}{s}$

Tamanho do pacote $= 60^2 \times 900.10^3 = 3,24.10^9$ bits

4 Mbits $\rightarrow$ 1 s

$3,24.10^9$ bits $\rightarrow$ t $\therefore \boxed{t = 810 s}$

(3) ENADE 2011

Conversor A/D $\rightarrow$ 10 bits $\begin{cases} -10V \\ 10V \end{cases} \Rightarrow \Delta A = 20V$

Para 10 bits, temos 1024 níveis

$$\text{Precisão} = \frac{20}{1024} = 0{,}02\,V = 20\,mV$$

(4) ENADE 2011

Cada cor $\rightarrow$ 8 bits

Cartão de memória p/ 1024 fotos $\{$ Cada foto (1024×1024)

1 foto $\rightarrow 1024^2$ pixel $\rightarrow 3 \times 8\ 1024^2$ bits/foto

Para 1024 fotos temos $\cancel{8}^{3} \times 1024^3\ \cancel{\text{bits}} \times \frac{\text{byte}}{\cancel{8}\ \cancel{\text{bits}}} = 1024^3$ bytes

1024 bytes $= 1KB$
1024^2 bytes $= 1MB$
1024^3 bytes $= 1GB$

$\therefore \boxed{3GB}$

Problemas básicos com resposta (Oppenheim)

Exercício 4.1

$x_c(t) = \sin(2\pi.100\,t)$, $t_a = \frac{1}{400}$ s

250
1250

$x[n] = x_c(nT_a)$

$= \sin\left(\frac{2\pi 100\,n}{400}\right) \quad \therefore \quad x[n] = \sin(0{,}5\pi n)$

Exercício 4.2

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right), \quad -\infty < n < \infty$

$\hookrightarrow x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty$

* Quais os possíveis valores para Ω_0?

$x[n] = x_c(nT_s)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) = \cos\left(\Omega_0 \cdot n \frac{1}{1000}\right)$

$\cos\left(\frac{2f_0}{f_s}\pi n\right)$

$\frac{\pi}{4} = \frac{\Omega_0}{1000} \quad \boxed{\Omega_0 = 250\,\Omega}$

Exercício 4.3

$$x_c(t) = \cos(4000\pi t) \longrightarrow x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$x[n] = x_c(n T_s)$$

$$\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \cos(4000\pi n T_s) \qquad \frac{\pi}{3} = 4000\pi T_s \quad \therefore \quad \boxed{T = \frac{1}{12000}\,s}$$

Exercício 4.4

$$x_c(t) = sen(20\pi t) + \cos(40\pi t) \rightarrow x[n] = sen\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$x_c(n T_s) = sen\left(20\pi . nT\right) + \cos\left(40\pi n T\right) = sen\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$20T = \frac{1}{5} \quad \therefore \quad \boxed{T = \frac{1}{100}\,s}$$

Aula PDS_02

Exemplo 2.1)

(a) $x[n] = \delta[n+2] + \delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-6]$

(b) $x[n] = 7\delta[n+1] - 5\delta[n+2] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + 2\delta[n-3] - \delta[n-6] + \delta[n-8]$

Exemplo 2.2)

$$x[n] = -2\delta[n+2] - u[n+1] - u[n-2] + 4u[n-3]$$

Exemplo 2.3)

$$x_c(t) = \cos(2\pi . 10 t)$$

$$x[n] = x_c(n T_s) = x_c\left(\frac{n}{f_s}\right)$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi . \overset{f_0}{10}}{f_s} n\right)$$

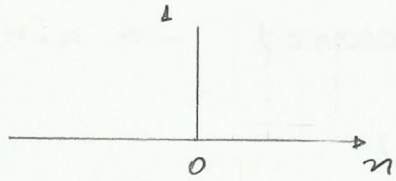
$$N = \frac{f_s}{f_0}$$

Para $f_s = 40\,Hz$ temos $N = 4$ (Periódico)

$f_s = 25\,Hz$ temos $N = 2,5$ (Não Periódico)

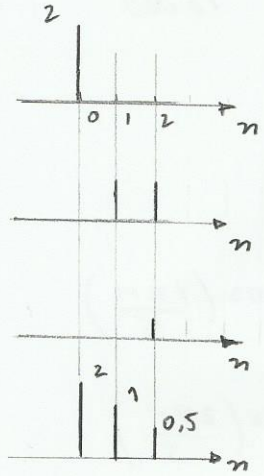
Exercício 2.4

a) $x[n] = u[n] - u[n-1]$



- Não Periódico
- Finita
- Simétrico Par
- Não Causal
- Energia 1

b) $x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 0{,}5\,\delta[n-2]$



$2\delta[n]$

$\delta[n-1]$

$0{,}5\,\delta[n-2]$

Não Periódico

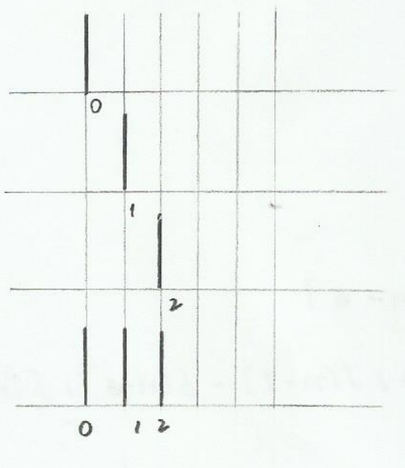
Finito

Não simétrico

Causal

Energia 5,25

c) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$



$\delta[n]$

$\delta[n-1]$

$\delta[n-2]$

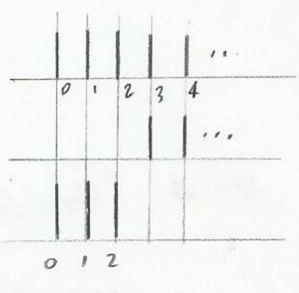
$\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

Tambem pode ser escrito

$x[n] = u[n] - u[n-2]$

- Não Periódico
- Finita
- Não simétrico
- Causal
- Energia 3

d) $x[n] = u[n] - u[n-3]$



$u[n]$

$u[n-3]$

$u[n] - u[n-3]$

Não Periódico

Finita

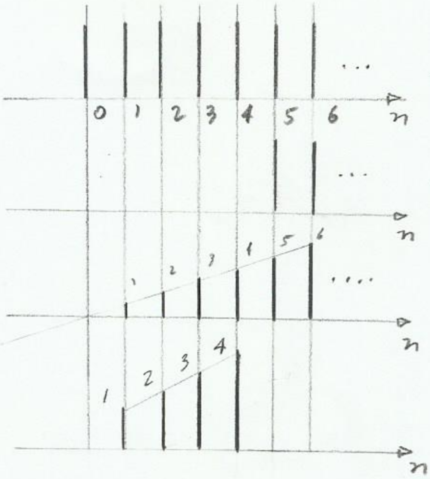
Não simétrico

Causal

Energia 3

e) $x[n] = n(u[n] - u[n-5])$

f) $x[n] = u[-n]$



$u[n]$

$u[n-5]$

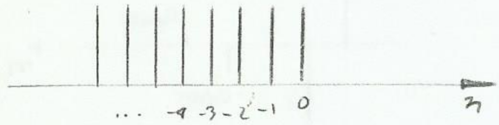
Não Periódico

Finito

Nao simétrico

Não causal

Energia 30



$x[0] = u[0] = 1$ $\quad$ $x[-1] = u[+1] = 1$

$x[1] = u[-1] = 0$ $\quad$ $x[-2] = u[+2] = 1$

$x[2] = u[-2] = 0$ $\quad$ $x[-3] = u[+3] = 1$

$x[3] = u[-3] = 0$. $\quad$ $x[-4] = u[+4] = 1$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

Não Periódico

Infinito

Não simétrio

Não Causal

g) $x[n] = u[-n-1]$

$x[0] = u[-1] = 0$ $\quad$ $x[-1] = u[0] = 1$

$x[1] = u[-2] = 0$ $\quad$ $x[-2] = u[1] = 1$

$x[2] = u[-3] = 0$ $\quad$ $x[-3] = u[2] = 1$

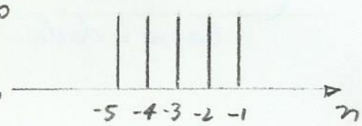
$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

Não Periódico

Infinito

Não simétrico

Anti causal



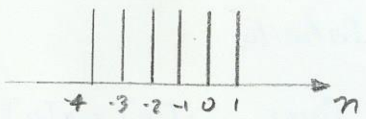
h) $x[n] = u[-n+1]$

$x[0] = u[1] = 1$ $\quad$ $x[-1] = u[2] = 1$

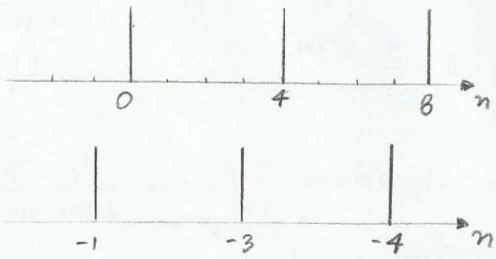
$x[1] = u[0] = 1$ $\quad$ $x[-2] = u[3] = 1$

$x[2] = u[-1] = 0$ $\quad$ $x[-3] = u[4] = 1$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$



i) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-3)\right)$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi 1}{4}n\right)$ $\quad$ $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi f_0}{f_s}n\right)$

$N = \frac{f_s}{f_0} = \frac{4}{1} = 4$

Periódico

Infinito

Não Simétrico

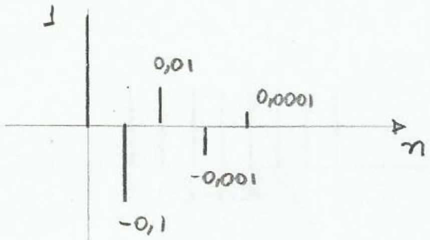
Anti causal

j) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-4)\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right)$

0

k) $x[n] = (-0,1)^n \cdot u[n]$



Não Periódico

Infinito

Não simétrico

Causal

Energia

CLASSIFICAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Sinal Discreto
- Duração
- Simetria
- Periodicidade
- Energia ou Potência
- Causalidade

Periodicidade: Um sinal periódico é aquele que se repete de modo periódico com um período T(s) que equivale a N amostras.

Duração:
- Finitos
- Infinitos

Simetria:
- Pares $x[-n] = x[n]$
- Ímpares $x[-n] = -x[n]$

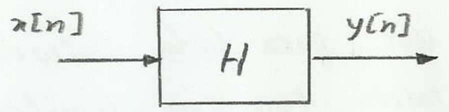
Causalidade
- Causais $n \geq 0$
- Anti-causais $n < 0$

Energia ou Potência
- Sinais de Energia $0 < E < \infty$ $\quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$
- Sinais de Potência $0 < P < \infty$
  - Não Periódicos $P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n]$
  - Periódicos $P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$

Sistemas Discretos no tempo

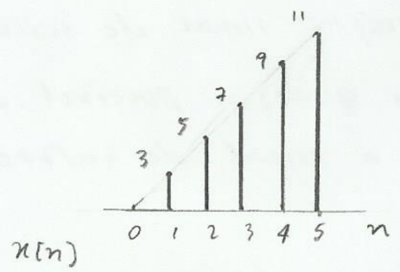
Sistema é uma interconexão de operações que mapeia um sinal de entrada em um sinal de saída.

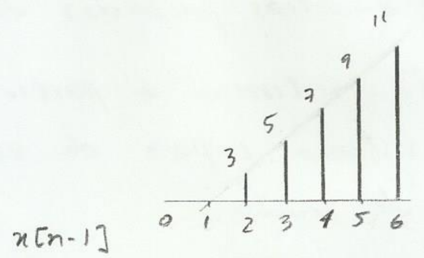
$$y[n] = H\{x[n]\}$$



Exercício 3.1

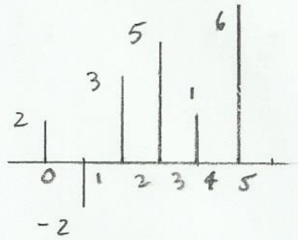
n: 0 1 2 3 4 5

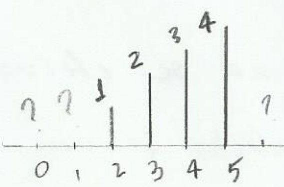


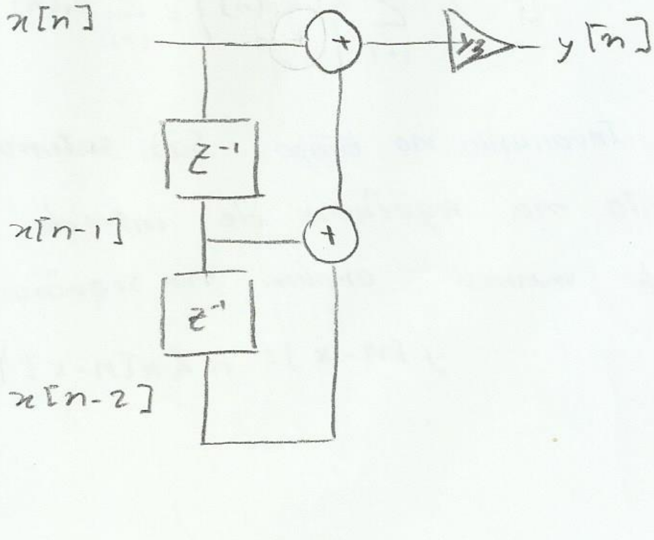


Exercício 3.2

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1] + x[n-2]}{3}$$; Para $x[n] = [2\ -2\ 3\ 5\ 1\ 6]$







Propriedades dos sistemas discretos

$y[n] = x[n-k]$; $k \neq 0$

- Com ou sem memória → Depende de valores passados ou futuros

$y[n] = x[n-k]$; $k \geq 0$

- Causal, não causal e anti causal

$k < 0$

↳ Valor atual depende somente de valores presentes e/ou passados do sinal de entrada.

- Sistemas estáveis. São sistemas que, para toda entrada limitada em amplitude, apresentam uma saída, também, limitada em amplitude.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Sistemas realimentados: São sistemas onde a amostra atual do sinal de saída depende de amostras passadas do próprio sinal de saída.

- Sistemas inversíveis São sistemas a partir dos quais é possível desenvolver um outro sistema capaz de obter o sinal de entrada a partir do sinal de saída.

$$H^{-1}\{H\{x[n]\}\} = x[n]$$

- Sistemas lineares: São sistemas onde são válidos os princípios da superposição e homogeidade.

$$H\{a.x[n]\} = a\,H\{x[n]\}$$

$$H\{x_1[n] + x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\}$$

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i\, x_i[n] \right\} = \sum_{i=1}^{N} a_i[n]\, H\{x_i[n]\}$$

- Sistemas Invariantes no tempo: São sistemas em que ao se efetuar um deslocamento na sequência de entrada, o único efeito é um deslocamento de mesma ordem na sequência de saída

$$y[n-k] = H\{x[n-k]\}$$

EXEMPLOS - Propriedades de Sistemas Discretos

Linearidade

Determinar se $x[n]$ é linear:

$$H\{a\,x[n]\} = a\,H\{x[n]\}$$

$$H_1\{x_1[n] + x_2[n]\} = H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\}$$

Sistema dado: $x[n] - x[n-1]$

$$H\{a x[n]\} = a\,x[n] - a\,x[n-1]$$
$$= a\,(x[n] - x[n-1])$$

$$H\{a x[n]\} = a\,H\{x[n]\}$$

$$H\{x_1[n] + x_2[n]\} = x_1[n] + x_2[n] - (x_1[n-1] + x_2[n-1])$$
$$= x_1[n] - x_1[n-1] + x_2[n] - x_2[n-1]$$
$$= H\{x_1[n]\} + H\{x_2[n]\}$$

Invariança no tempo

Exemplo 1.18

- Sistema dado: $y[n] = H\{x[n]\} = e^{-n} x[n]$
- Resposta para um sinal de entrada deslocado $H\{x[n-K]\} = e^{-n} x[n-K]$

Condição

$$y[n-K] = H\{x[n-K]\}$$

$$e^{-(n-K)}\,x[n-K] = e^{-n}\,x[n-K]$$

Como as duas são diferentes, o sistema não é invariante com o tempo

Exemplo 1.19

Sistema dado : $y[n] = H\{x[n]\} = x[Mn]$

Condição : $y[n-K] = H\{x[n-K]\}$

$$y[n-K] = x[M(n-K)]$$
$$= x[Mn - MK]$$

$H\{x[n-K]\} =$

[redacted] Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

São os sistemas mais utilizados em todas as áreas da Engenharia, uma vez que este tipo de sistema é totalmente caracterizado pela sua resposta impulsiva.

Resposta ao Impulso

$$h[n] = H\{\delta[n]\}$$

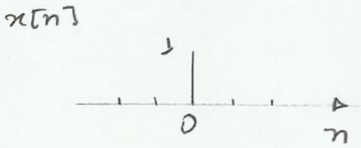
Seja $y[n]$ a saída do sistema quando a entrada é o sinal $x[n]$

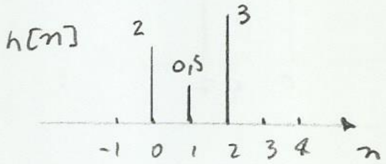
$$y[n] = H\{x[n]\}$$

$$\boxed{\begin{gathered} y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\, h[n-K] \\ y[n] = x[n] * h[n] \end{gathered}}$$

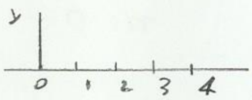
Exercício 3.12

$x[n] = \delta[n]$ $\qquad h[n] = 2\delta[n] + 0{,}5\,\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$





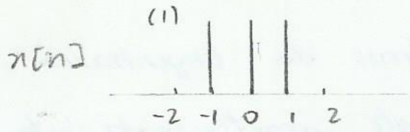
p/ $n=0$ $\quad y[0] = \sum x[K]\, h[0-K]$

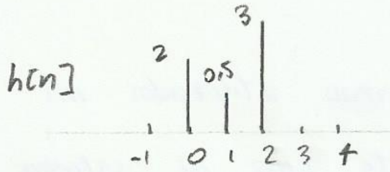


p/ $n=1$ $\quad y[1] = \sum x[K]\, h[1-K]$

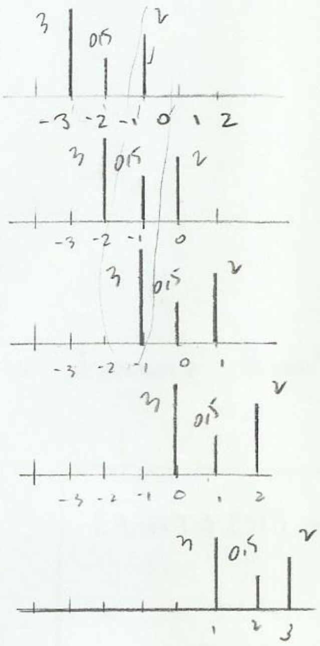
p/ $n=2$ $\quad y[2] = \sum x[K]\, h[2-K]$

d) $x[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$ $h[n] = 2\,\delta[n] + 0{,}5\,\delta[n-1] + 3\,\delta[n-2]$





$y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$; $h[n-k] = h[$



$n = -1$ $y[-1] = 2$

$n = 0$ $y[0] = 2{,}5$

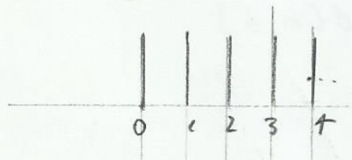
$n = 1$ $y[1] = 5{,}5$

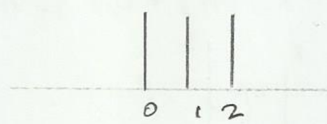
$n = 2$ $y[2] = 3{,}5$

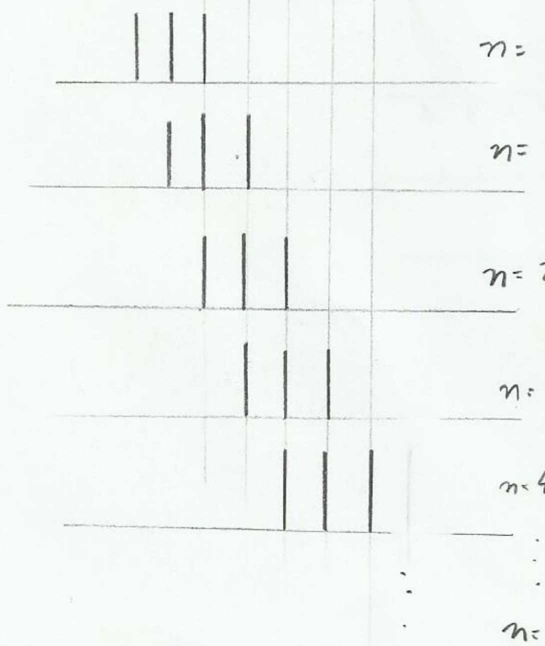
$n = 3$ $y[3] = 3$

e) $x[n] = u[n]$ $h[n] = u[n] - u[n-3]$

$y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$







$n = 0$ $y[0] = 1$

$n = 1$ $y[1] = 2$

$y[2] = 3$

$n = 2$ $y[3] = 3$

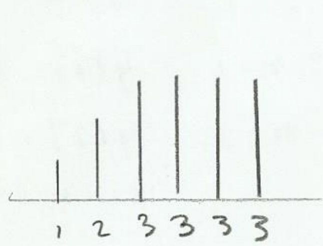
$y[4] = 3$

$n = 3$ ⋮ 3

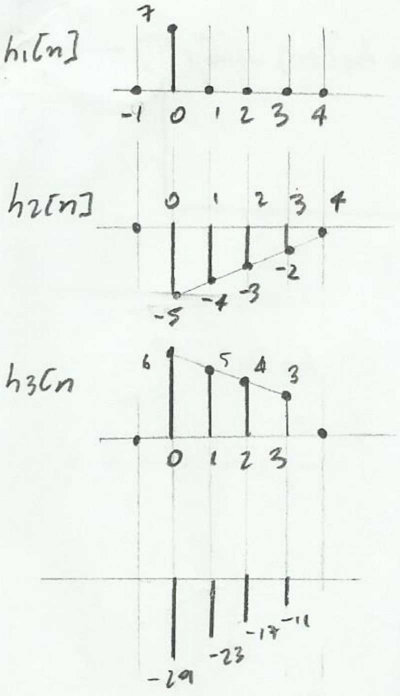
$n = 4$

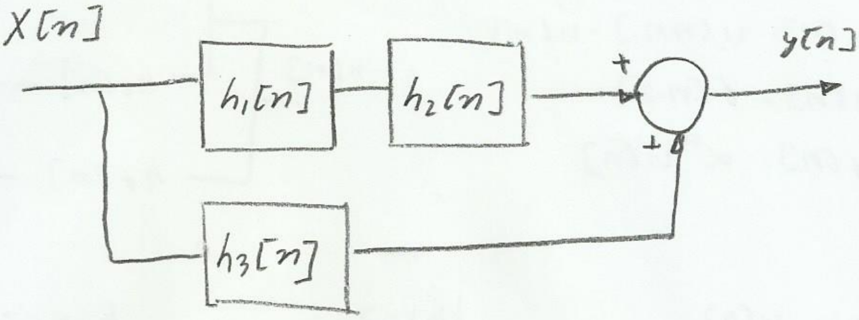
⋮

$n = \infty$



Exercício 3.14





$h_1[n] = 7\delta[n]$

$h_2[n] = -5\,\delta[n] - 4\delta[n] - 3\,\delta[n] - 2\,\delta[n]$

ou

$h_2[n] = (n-5)\,(u[n] - u[n-4])$

$h_3[n] = 6\delta[n] + 5\delta[n] + 4\,\delta[n] + 3\delta[n]$

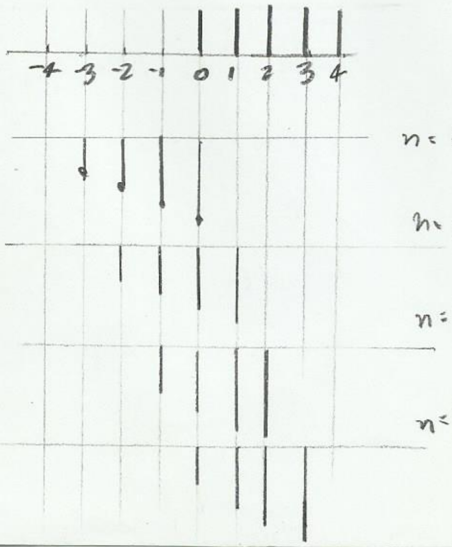
ou

$h_3[n] = (6-n)(u[n] - u[n-4])$

Para <u>Resposta Impulsiva</u>, temos: $x[n] * \delta[n] = x[n]$

$$y[n] = h_1[n]\,h_2[n] + h_3[n]$$
$$= 7\,\delta[n] \cdot (n-5)\,(u[n] - u[n-4]) + (6-n)\,(u[n] - u[n-4])$$
$$= (7n-35)\,(u[n] - u[n-4]) + (6-n)\,(u[n] - u[n-4]$$
$$\therefore\; y[n] = (6n-29)\,(u[n] - u[n-4])$$

Para Resposta ao <u>degrau unitário</u> $\quad s[n] = h[n] * u[n]$



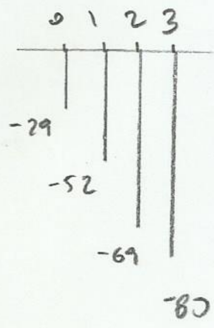
$n=0 \quad s[0] = -29$

$n=1 \quad s[1] = -52$

$n=2 \quad s[2] = -69$

$\quad\;\; s[3] = -80$

$n=3$



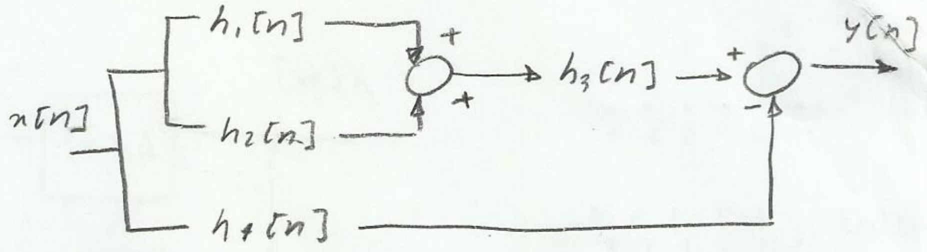
Exercício 3.13)

$h_1[n] = u[n]$

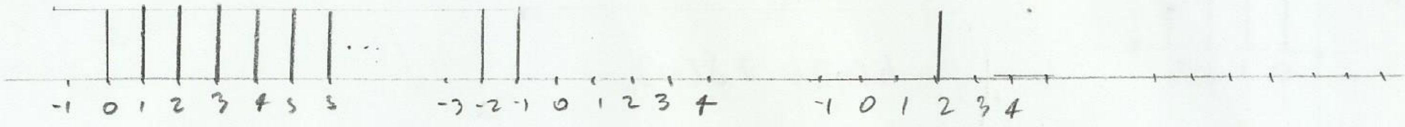
$h_2[n] = u[n+2] - u[n]$

$h_3[n] = \delta[n-2]$

$h_4[n] = \alpha^n u[n]$



$h_1[n] = u[n]$ $\quad$ $h_2[n]$ $\quad$ $h_3[n]$ $\quad$ $h_4[n] = ?$



$$y[n] = \left((h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]\right) - h_4[n]$$

$$= (u[n] + u[n+2] - u[n]) * \delta[n-2] - \alpha^n u[n]$$

$$= u[n+2] * \delta[n-2] - \alpha^n u[n]$$

$$= u[n+2] - \alpha^n u[n] \quad \text{(Resposta impulsiva)}$$

Para resposta ao degrau

$s[n] = h[n] * u[n]$

?

Processamento Digital de Sinais **P2**

Análise de Sinais Discretos no Domínio da Frequência

A Análise de Fourier

Transformada é a representação da amplitude dos termos da série de Fourier em <u>função da frequência.</u>

(É o método de análise e síntese de sinais no domínio da frequência)

A <u>série de Fourier</u> é um método de descrever a sequência periódica $x[n]$ através das somatórias de N sequências (cos)senoidais. (Frequência angular de cada componente)

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{jw_K \cdot n}}$$

$$w_K = K \cdot \frac{2\pi}{N} = [0 : 2\pi[$$

$$X[K] = A[K] + j\, B[K]$$

(Coeficientes de Fourier)

1 período do sinal amostrado

x A FT de um impulso unitário é uma constante com o valor da amplitude do impulso.

— // —

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{jw_K n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} (A[K] + j B[K])(\cos(w_K n) + j \operatorname{sen}(w_K n))$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} \underbrace{(A[K]\cos(w_K n) - B[K]\operatorname{sen}(w_K n))}_{\text{Real}\{X[K]\, e^{jw_K n}\}} + j\, \underbrace{(B[K]\cos(w_K n) + A[K]\operatorname{sen}(w_K n))}_{\text{Imag}\{X[K]\, e^{jw_K n}\}}$$

Funções Periódicas { Periodo : $f(t) = f(t+T_0) = f(t+2T_0) \ldots$
Frequência Fundamental $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ [rad/s] ; $f_0 = \frac{1}{T_0}$ [Hz]

Harmônicas : Frequências multiplas da frequência fundamental : $w_2 = 2w_0 \quad w_3 = 3w_0 \ldots$

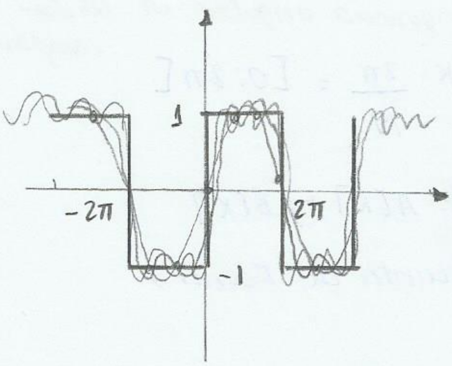
Exemplo: $\sin(t)$ (Função Periódica)

$T_0 = 2\pi s$ $\quad w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Periodo

Frequência Fundamental ; Portanto, as harmônicos podem ser 2, 3, 4 ...

Ex:



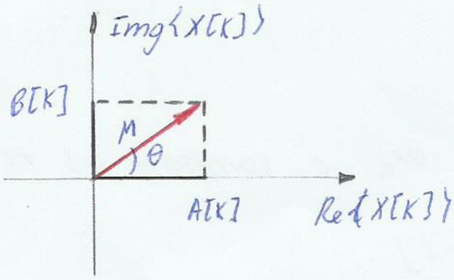
$T_0 = 4\pi$

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$\tilde{f}(t) = A\sin(w_0 t) + B\sin(3w_0 t) + C\sin(5w_0 t) + \ldots$

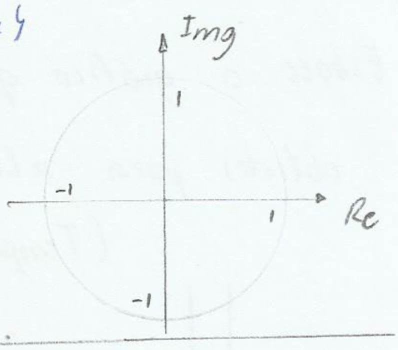
<u>Transformada de Fourier</u>: Representa a função do domínio do tempo no domínio da frequência.

Notação Polar



$X = Re\{X\} + j\, Imag\{X\}$

$\rightarrow X = Mag\{X\} \angle ph\{x\}$



$x[n] = \cos(wn)$	$X = 1\angle 0 \qquad X = 1 + 0j$
$x[n] = -\cos(wn) = \cos(wn + \pi)$	$X = 1\angle \pi \qquad X = -1 + 0j$
$x[n] = sen(wn) = \cos(wn - \pi/2)$	$X = 1\angle -\pi/2 \qquad X = 0 - 1j$
$x[n] = sen(wn) = \cos(wn - \pi/2)$	$X = 1\angle \pi/2 \qquad X = 0 + 1j$

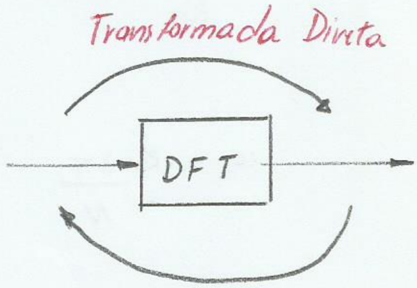
A Transformada de Fourier (DFT)

A transformada de Fourier é um método de descrever a sequência periódica $x[n]$ em função das sequências (co)senoidais que as compõem.

Domínio do Tempo

Domínio da Frequência

$x[n] = \delta[n - n_0]$



$Re\{X[k]\} = \cos\left(n_0 \frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$

$Imag\{X[K]\} = -sen\left(n_0 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$

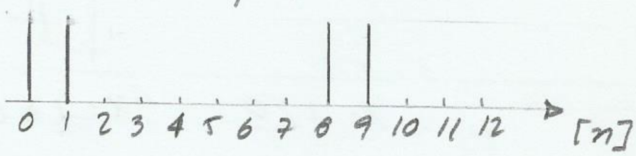
$$\boxed{X[K] = e^{-j n_0 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot K} = \cos\left(n_0 \cdot \frac{2\pi}{N} k\right) - j\, sen\left(n_0 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot k\right)}$$

Exercício 4.2)

$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ con $N = 8$ amostras

Esboce o gráfico que relaciona $X[K]$ com w_K e compare os resultados obtidos para $x[n] = \delta[n]$ e $x[n] = \delta[n-1]$

(Tempo)



$$X[K] = e^{-jn_0 \frac{2\pi}{N} k} = \underbrace{\cos\left(n_0 \frac{2\pi}{N} k\right)}_{Re} - j \underbrace{sen\left(n_0 \frac{2\pi}{N} \cdot k\right)}_{Imag}$$

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N} x[n] e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}$$

(Quando $n = 0$, temos $e^0 = 1$)

$n=0 \quad x[0] = 1$

$n=1 \quad x[1] = 1$

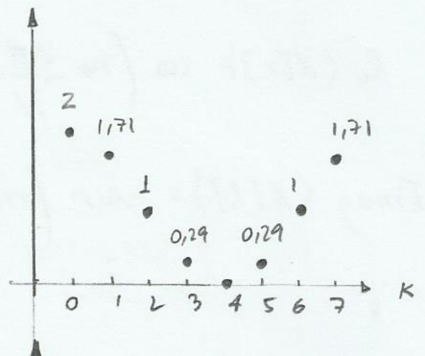
$n=2 \quad x[2] = 0$

$\vdots$

$n=7 \quad x[7] = 0$

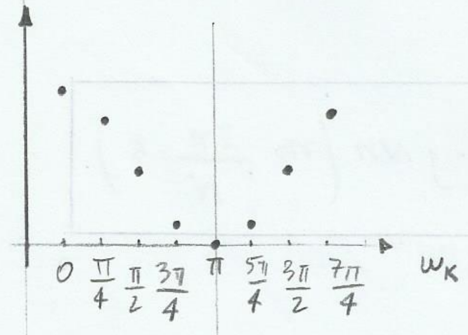
$$x[K] = 1 + e^{\frac{-j\pi K}{4}}$$

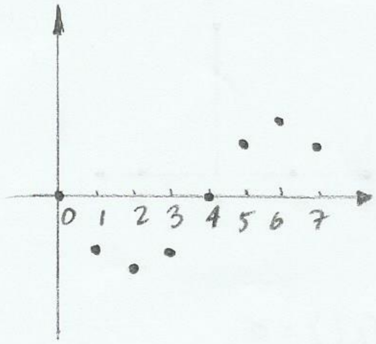
$$x[K] = \underbrace{1 + \cos\left(\frac{\pi K}{4}\right)}_{Re} - j \underbrace{sen\left(\frac{\pi K}{4}\right)}_{Im}$$



$$w_K = K \cdot \frac{2\pi}{N} \quad (N = 8)$$

Simetria Par





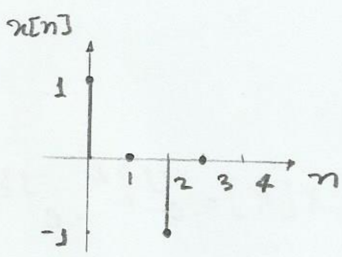
Exercício 4.3 Encontre os coeficientes de Fourier para os sinais periódico apresentados abaixo e esboce a transformada de Fourier em ω. Considere $N=4$, e depois, $N=8$

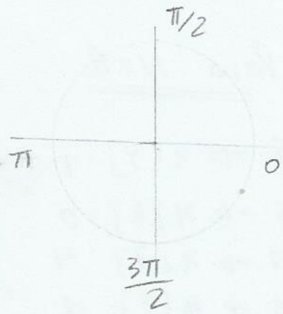
$$\left(X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\omega_k n} \quad ; \; \omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right) k \right.$$

ou $W_N = e^{-\omega_k \cdot n}$

(a) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

Para $N=4$
$$\begin{cases} n=0 & x[0] = 1 \\ n=1 & x[1] = 0 \\ n=2 & x[2] = -1 \\ n=3 & x[3] = 0 \end{cases}$$





$$X[k] = 1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)2 \cdot}$$

P/ $N=4$

$$X[k] = \underbrace{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{N} k\right)}_{Re\{X[k]\}} + \underbrace{j \sin\left(\frac{4\pi k}{N}\right)}_{Imag\{X[k]\}}$$

$n=4 \rightarrow x[4] = 1$
$n=5 \rightarrow x[5] = 0$
$n=6 \rightarrow x[6] = -1$
$n=7 \rightarrow x[7] = 0$

$$X[k] = 1 - e^{-j2\omega_k} + e^{-j4\omega_k} - e^{-j6\omega_k}$$

$$\omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right) k$$

Para $N=8$, temos $\omega_k = \frac{\pi}{4} \cdot k$

$$e^{-j2\omega_k} = \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right)$$

$$e^{-j4\omega_k} = \cos(\pi k) - j \sin(\pi k)$$

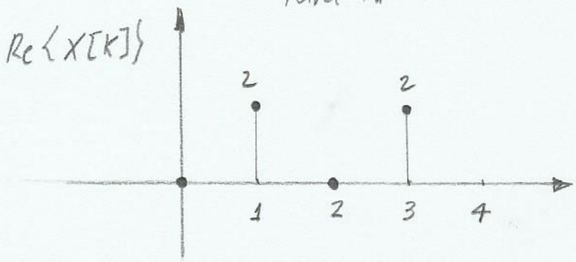
$$e^{-j6\omega_k} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi k\right) - j \sin\left(\frac{3}{2}\pi k\right)$$

P/ $N=8$

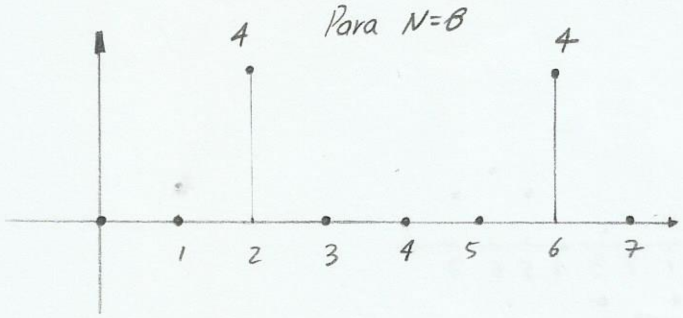
$$Re\{X[k]\} = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} k\right) + \cos(\pi k)$$

$$Imag\{X[k]\} = -\sin(\pi k)$$

Para $N=4$



Para $N=8$

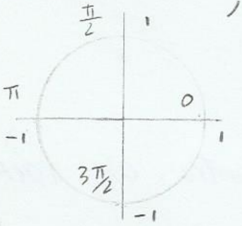


$Img\{X[K]\} = 0$

$Img\{X[K]\} = 0$

(b) $x[n] = sen\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$$\left(X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j w_K \cdot n} \quad ; \quad w_K = \left(\frac{2\pi}{N}\right)K \right)$$



Para $N = 4$

$n=0 \to x[0] = 0$
$n=1 \to x[1] = 1$
$n=3 \to x[2] = 0$
$n=4 \to x[3] = -1$

$$X[K] = e^{-j\frac{\pi}{2}K} - e^{-j\frac{3\pi}{2}K}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - j sen\left(\frac{\pi}{2}K\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}K\right) + j sen\left(\frac{3\pi}{2}K\right)$$

$$= 0 - j\,2\, sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi) \\ \cos\theta = \cos(\theta + 2K\pi); K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$Re\{X[K]\} = 0$

$Imag\{X[K]\} = -2\, sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)$

Para $N=8$

$n=5 \to x[5] = 1$
$n=6 \to x[6] = 0$
$n=7 \to x[7] = -1$
$n=8 \to x[8] = 0$

$$X[K] = e^{-j\frac{\pi}{2}K} - e^{-j\frac{3\pi}{2}K} + e^{-j\frac{5\pi}{2}K} - e^{-j\frac{7\pi}{2}K}$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}K} = \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - j sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)$$

$$-e^{-j\frac{3\pi}{2}K} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - j sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)$$

$$e^{-j\frac{5\pi}{2}K} = \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) - j sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)$$

$$e^{-j\frac{7\pi}{2}K} = \cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) + j sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)$$

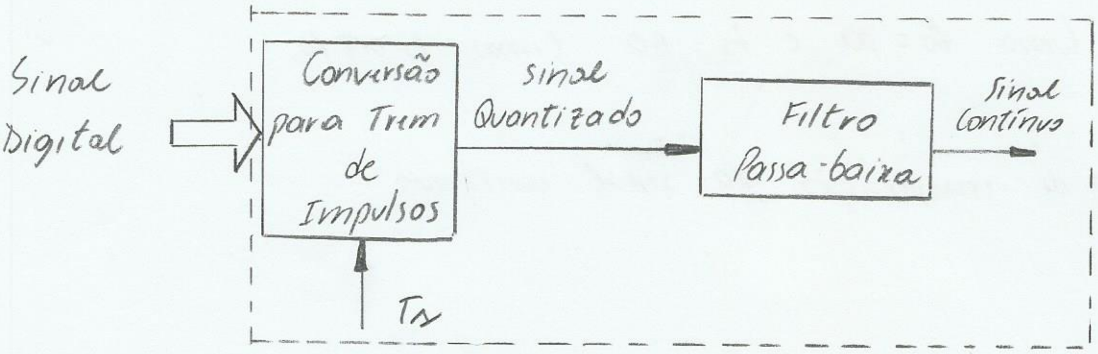
$$X[K] = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{2}K\right)}_{Real} - j\,\underbrace{2\, sen\left(\frac{\pi}{2}K\right)}_{Imag}$$

Principais propriedades da DFT

- Linearidade $\left\{ \begin{array}{l} \text{homogeneidade} \\ \text{superposição} \end{array} \right.$

- Periodicidade e Simetria

Reconstrução do Espectro do sinal contínuo a partir da DFT



Exercício 4.4

$x(t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot t)$ é amostrado com $F_s = 80Hz$

(a) Descreva o processo de amostragem deste sinal, esboçando $x[n]$ e $X[K]$. Faça $N = 8$

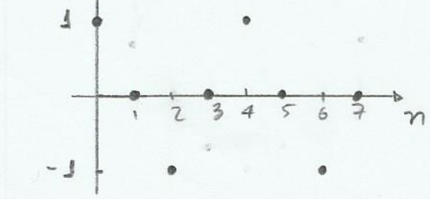
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j w_K \cdot n} \quad ; \quad w_K = \left(\frac{2\pi}{N}\right)K$$

$x[n] = x_c(nT_s)$; $T_s = \frac{1}{F_s}$

$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 20}{80} n\right)$

$$\boxed{x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)}$$

Para: $x[0] = 1$, $x[1] = 0$, $x[2] = -1$, $x[3] = 0$, $x[4] = 1$, $x[5] = 0$, $x[6] = -1$, $x[7] = 0$



$$X[K] = 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}K} + e^{-j\pi K} - e^{-j\frac{3\pi}{2}K}$$

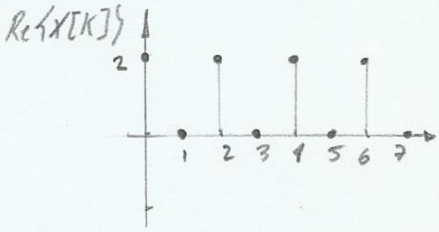
$$-e^{-j\frac{\pi}{2}K} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}K\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}K\right)$$

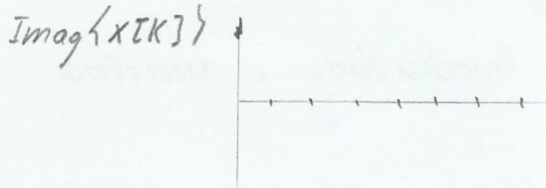
$$e^{-j\pi K} = \cos(\pi K) - j\,\text{sen}(\pi K)$$

$$-e^{-\frac{3\pi}{2}K} = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}K\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi K\right)$$

$$X[K] = 1 - \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}K\right)}^{\to 0} + \cos(\pi K) - \cancel{\cos\left(\frac{3\pi}{2}K\right)}^{\to 0} + j\left[\cancel{\sin\left(\frac{\pi K}{2}\right)} - \cancel{\sin(\pi K)}^{\to 0} + \cancel{\sin\left(\frac{3\pi}{2}K\right)}\right]$$

$$X[K] = 1 + \cos(\pi K) + j\,0$$





b) Demonstre se atende ou não ao critério de Nyquist.

$f_s \geq 2 f_0$; Como $f_0 = 20$ e $f_s = 80$ temos $f_s \geq 2 f_0$

c) Descreva o processo de recuperação do sinal contínuo

d) Repita para $x(t) = \cos(2\pi 60 t)$

$x[n] = x_c(nT_s)$; $T_s = 1/F_s = 1/80$

$$\boxed{x[n] = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right)}$$

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j w_K n} \quad ; \quad w_K = \left(\frac{2\pi}{N}\right) K$$

$x[0] = 1$ $x[4] = 1$

$x[1] = 0$ $x[5] = 0$

$x[2] = -1$ $x[6] = -1$

$x[3] = 0$ $x[7] = 0$

$$X[K] = 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}K} + e^{-j\pi K} - e^{-j\frac{3\pi}{2}K} \Rightarrow X[K] = 1 + \cos(\pi K)$$

$f_s < 2f_0$ $\therefore$ Não atende o Critério de Nyquist

Exercício 4.5)

$x(t) = 0{,}7\,\text{sen}(2\pi 50 t) + \text{sen}(2\pi . 120 t)$ { amostrado com $F_s = 1KHz$, $N = 1000$ amostras.

x Quantidade de amostras da sua DFT

x Banda em Herz do espectro obtido pela DFT

x O espaçamento entre duas amostras consecutivas do espectro.

$x[n] = x_c(nT_s) = x_c\left(\frac{n}{F_s}\right)$ $\therefore$ $x[n] = 0{,}7\,\text{sen}\left(\frac{2\pi 50}{1000} n\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi . 120}{1000} n\right)$

Portanto, a quantidade de amostras da sua DFT equivale a 1000 amostras

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j w_k n} \quad ; \quad w_k = \frac{2\pi}{1000} K$$

$\cos(w_K n) - j\,\text{sen}(w_K n)$

Logo, a banda passante da DFT é de $0 \rightarrow 1KHz$ (F_s

Espaçamento: $\frac{f_s}{K} = \frac{1.10^3 Hz}{100} = 1Hz$ ou $\frac{2\pi}{1000} \cdot 1000 = 2\pi \frac{rad}{s}$

Projeto de Filtros Digitais

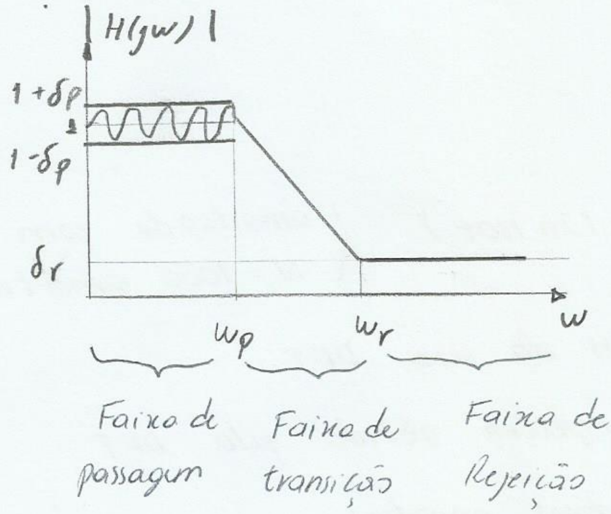
Especificações de Filtros Digitais

* Banda de Transição

$$\Delta f = f_r - f_p \rightarrow \Delta \omega = \omega_r - \omega_p \quad \begin{cases} \omega_r: \text{ frequência angular de rejeição} \\ \omega_p: \text{ frequência angular de passagem} \end{cases}$$

* Tolerância / Ripple

$$\begin{cases} 1 - \delta_p \leq |H| \leq 1 + \delta_p & \text{para } 0 \leq \omega \leq \omega_p \rightarrow 0 \leq f \leq f_p \\ |H| \leq \delta_r & \text{para } \omega \geq \omega_r \rightarrow f \geq f_r \end{cases}$$



Resposta em frequência

Parametros de Desempenho

× Frequência de corte.
× Banda de Transição.
× Ripple.
× Atenuação na banda de rejeição.

Resposta ao degrau

× Tempo de subida
× Sobre-sinal
× Fase

Exercício 5.1)

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k] \qquad \text{Ordem } 3 \rightarrow N = 4$$

(a) Resposta Impulsiva $x[n] = \delta[n]$

$$y[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \delta[n-k] = \frac{1}{4}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]\right)$$

$y(0) = 1/4$

$y(1) = 1/4$

$y(2) = 1/4$

$y(3) = 1/4$

~~$h[n] = y[n] \begin{cases} 1/4 & p/\ 0 \leq n \leq 3 \\ 0 \end{cases}$~~

Projeto de Filtros:

Filtragem linear: Consiste na convolução realizada no domínio do tempo entre o sinal de entrada e a resposta ao impulso do filtro

Filtros Digitais $\begin{cases} \text{FIR (Finite Impulse Response)} \\ \text{IIR (Infinite Impulse Response)} \end{cases}$

FIR $h[n] = \Sigma\delta[n]$

- Resposta Impulsiva Finita
- Operam por convolução com a $h[n]$
- Sempre estáveis
- Bom desempenho, embora possam ser lentos para $h[n]$ comprido

IIR $h[n] = u[n]$

- Resposta Impulsiva Infinita
- Operam de forma recursiva
- São mais rápidos que os filtros FIR
- Podem se tornar instáveis

Filtros FIR

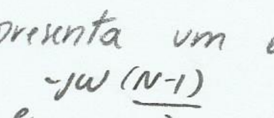
- Possuem comprimento N, onde $M = N-1$ (Ordem do Filtro)
- Esse valor é equivalente ao grau do polinômio em z que representa sua função de transferência.

Janelamento Retangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases}$$

$$h[n] = h_i\left[n - \frac{N-1}{2}\right] \cdot w[n]$$

Representa um atraso de $\frac{(N-1)}{2}$ amostras, e uma frequência defasada em $e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}$ do filtro original.



$H_i(\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_c}\right)$

(Ideal)

$$\longrightarrow h_i(t) = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}(\Omega_c t)$$

$$\downarrow$$

$$h_i[n] = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{n}$$

$$h[n] = h_i\left[n - \frac{N-1}{2}\right] w[n]$$

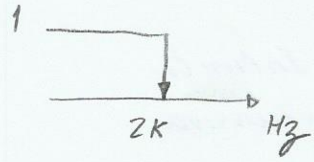
$$H(e^{j\omega}) = FFT(h[n])$$

Exercício 5.2)

Projetar um filtro passa baixa com $f_c = 2KHz$ e $f_s = 8KHz$, através do janelamento retangular:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Encontre os coeficientes da resposta impulsiva de um filtro FIR de ordem 4 (ou seja, N=5 amostras)



$$h[n] = h_i\left[n - \frac{N-1}{2}\right] w[n]$$

$$h_i[n] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(w_c n)}{n} \quad ; \quad w_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} = \frac{\pi}{2}$$

$$h_i[n] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)}{n}$$

$$h_1[0] = \frac{1}{\pi} \lim_{n \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)}{n} = \frac{\pi}{2} / \pi = \frac{1}{2}$$

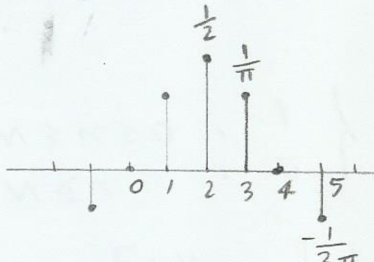
$h_1[1] = \frac{1}{\pi}$

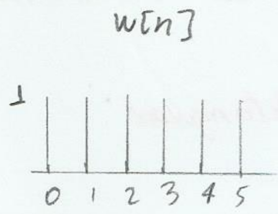
$$h[n] = h_1\left[n - \frac{N-1}{2}\right] w[n] = h_1[n-2]\, w[n]$$

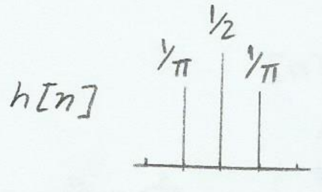
$h_1[2] = 0$

$h_1[3] = -\frac{1}{3\pi}$

$h_1[4] = 0$







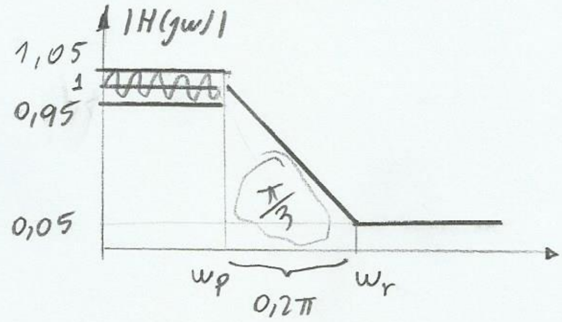
filtro com N=5

(b) Verifique a estabilidade do filtro

$$\sum |h[n]| = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < \infty \quad \text{(Estável)}$$

Exercício 5.3)

Deseja-se um filtro digital com $w_c = \pi/3$ (Janelamento Ideal $\Delta w = 0{,}2\pi$ e $\delta_p = \delta_r = 0{,}05$)



$\Delta w = w_r - w_p = 0{,}2\pi$

$\delta_r = 0{,}05$

$\delta_{r_{dB}} = 20 \log 0{,}05 = -26{,}02$ (Usar Hanning)

Para Hanning: $\Delta w = 2{,}51\pi / N$; Para $\Delta w = 0{,}2\pi$ temos $N = 25{,}1$ amostras

$\times 2$?

Para Hamming: $\Delta w = 2 \times 3{,}14\pi / N$ ∴ Temos $N = 31{,}4$ amostras

Para Blackman: $\Delta w = 2 \times 4{,}6\pi / N$ ∴ Temos $N = 46$ amostras

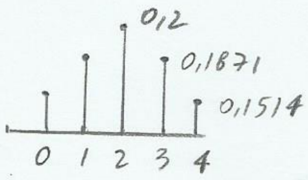
Exercício 5.4)

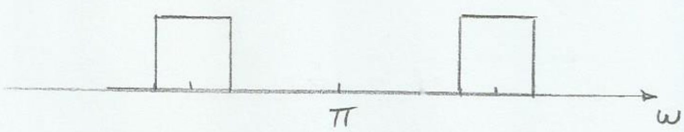
FIR passa baixa: (Janelamento Retangular) $w_c = 0{,}2\pi$

$H_{pb}[w]$	0,1514	0,1871	0,2	0,1871	0,1514

(a) Passa-alta com $w_c = 0{,}2\pi$

FPB





$w_c = 0{,}2\pi$ $\left(W = K \cdot \frac{2\pi}{5} \right)$

$0 \quad \frac{2\pi}{5} \quad \frac{4\pi}{5} \quad \frac{6\pi}{5} \quad \frac{8\pi}{5}$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Domínio da Frequência — **Domínio do Tempo**

Análise — Transformada Inversa — Síntese

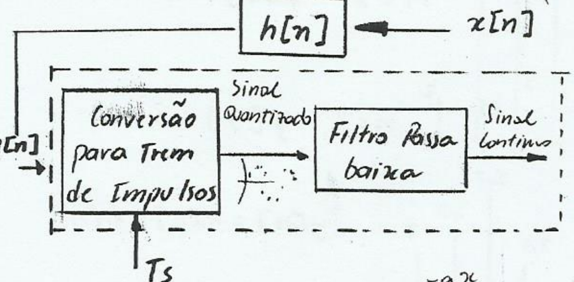
$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)Kn} \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)Kn}$$

Transformada Direta

Principais propriedades da DFT
- Linearidade { homogeneidade, superposição
- Periodicidade e Simetria

5. PROJETO DE FILTROS DIGITAIS

(Simétrico em π - Par)



$e^{-ax} = \cos(a) - j\,sen(a)$

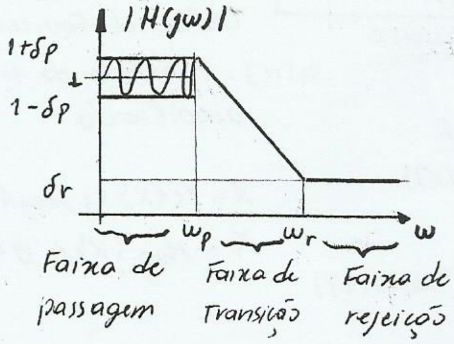
Especificação de Filtros Digitais

Banda de Transição: $\Delta f = f_r - f_p \rightarrow \Delta w = w_r - w_p$

w_r: frequência angular de rejeição

w_p: frequência angular de passagem.

Tolerância / Ripple



Filtros FIR (Possuem comprimento N, onde $M = N-1$ é a ordem do filtro)

JANELAMENTO RETANGULAR:

(Atraso em $\frac{N-1}{2}$ e freq. de fas. $e^{jw\left(\frac{N-1}{2}\right)}$)

$$w[n] = \begin{cases} 1 & se\ 0 \le n \le N-1 \\ 0 & se\ n \ge N \end{cases} \qquad h[n] = h_i\left[n - \frac{N-1}{2}\right] w[n]$$

$$h_i[n] = \frac{1}{\pi}\frac{sen(w_c n)}{n} \qquad \lim_{n\to 0}\frac{sen(w_c n)}{n} = w_c$$

$H(e^{jw}) = FFT(h[n])$

$$\boxed{w_c = \frac{2\pi f_c}{f_s}}$$

Estabilidade do Filtro

$\Sigma |h[n]| < \infty$

Tipos de Janela

Triangular:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & se\ 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & se\ \frac{N-1}{2} < n \le N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Hanning:

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & se\ 0 \le n \le N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Hamming:

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & se\ 0 \le n \le N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Blackman

$$w[n] = \left\{ 0{,}42 - 0{,}5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0{,}08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right. \quad se\ 0 \le n \le N-1$$

Comparação entre Janelas

Janela	Faixa de Transição (Δw)	Ripple (δ_p e δ_s) Máx
Retangular	2x 0,91 π/N	-21 dB
Triangular	2x 1,19 π/N	-25 dB
Hanning	2x 2,51 π/N	-44 dB
Hamming	2x 3,14 π/N	-53 dB
Blackman	2x 4,6 π/N	-74 dB

Filtro Passa Alta $\quad y[n] = \delta[n] - h[n]$ (Inversão Espectral) FPB $\quad \delta\left[n - \frac{N-1}{2}\right]$

(Reversão Espectral)

$y[n] = h[n] \times s[n]$; $s[n] = \cos\left(w_o\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right)$

Filtro Passa-Faixa $\quad$ FPB (Dúvida, Admite $\cancel{w_o = \pi}$) $\quad w_o = w_c / k$

0 π 2π

$x[n] \rightarrow h_1[n] \rightarrow h_2[n] \rightarrow y[n]$

low $\quad$ high $\quad$ FPF

Filtro Rejeita-Faixa

$x[n] \rightarrow \begin{bmatrix} h_1[n] \\ h_2[n] \end{bmatrix} \oplus \rightarrow y[n] \qquad y[n] = h_1[n] + h_2[n]$

FRF

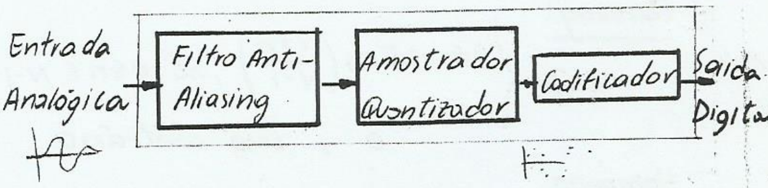
Nome: Erivelton Gualter dos Santos 11.210.368-4

Obtenção de Sinais Discretos no tempo:

$x[n] = x_c(n T_s)$

Teorema de Nyquist: $f_s \geq 2 f_0$

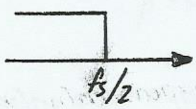
CONVERSÃO ANALÓGICA DIGITAL



Relacionamento entre o espectro da sequência de tempo discreto com o sinal amostrado:

$w = \frac{2\pi f_0}{f_s}$ $N = \frac{f_s}{f_0}$ $w = \frac{2\pi}{N}$

Filtro Anti-Aliasing



SINAIS CODIFICADOS E QUANTIZADOS

ERRO = Quantizado - Amostrado

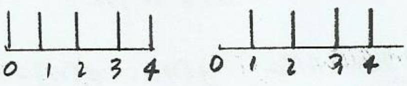
$ERRO_{máx} = \frac{Precisão}{2}$

$x[n+K]$ Adiantado

SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

Sistema Atrasador $y[n] = x[n-K]$

Por exemplo:



$x[n] = u[n]$ $y[n] = x[n-1]$

Para $u[n+K]$, o sistema começa em $-K$.

Diferenciação: $\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$

SISTEMAS LINEARES: Válido os princípios de - superposição - homogeneidade

Sistemas Invariantes no tempo: São os sistemas em que ao se efetuar um deslocamento na sequência de entrada, o único efeito é um deslocamento de mesma ordem na sequência de saída.

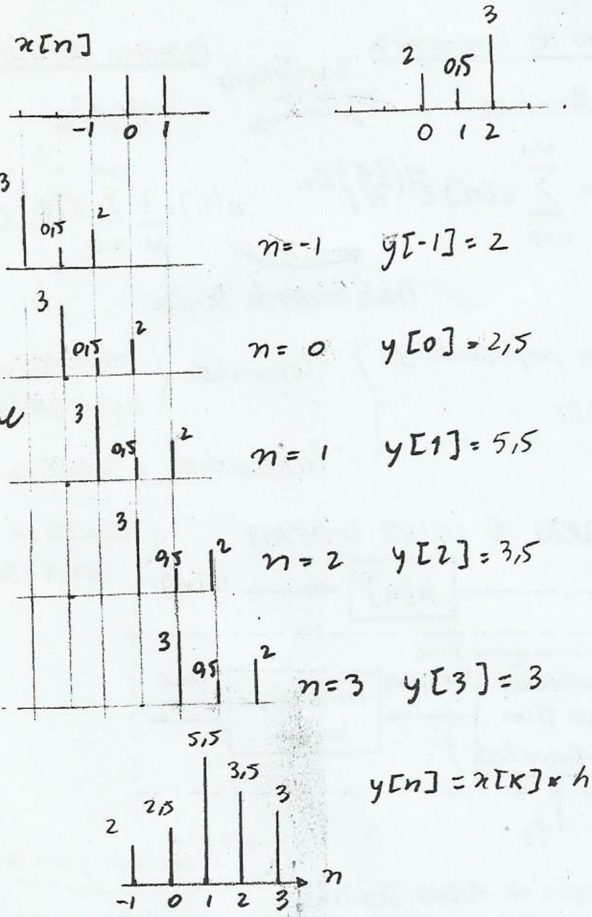
$y[n-K] = H\{x[n-K]\}$

SOMA DE COVOLUÇÃO: $y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K] h[n-K]$

Resposta em frequência $H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{jwn}$

$y[n] = x[K] * h[n]$

Exemplo Covolução



$n = -1$ $y[-1] = 2$

$n = 0$ $y[0] = 2{,}5$

$n = 1$ $y[1] = 5{,}5$

$n = 2$ $y[2] = 3{,}5$

$n = 3$ $y[3] = 3$

$y[n] = x[K] * h[n]$

4. Análise de Sinais Discretos no Domínio da Frequência.

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{jw_K \cdot n}}$$

SÉRIE DE FOURIER

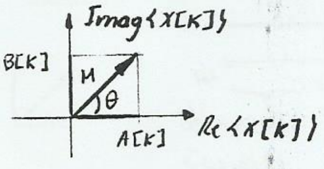
$w_K = K \cdot \frac{2\pi}{N} = [0 : 2\pi[$

$X[K] = A[K] + jB[K]$

Coefic. de Fourier

$x[n]$: 1 período do sinal amostrado

NOTAÇÃO POLAR

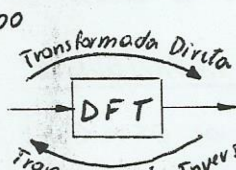


$X = Re\{X\} + j\, Img\{X\}$

$X = Mag\{X\} \angle \theta\{X\}$

A Transformada de Fourier (DFT)

Domínio do Tempo Domínio da Frequência



$x[n] = \delta[n - n_0]$

$Re\{X[K]\} = \cos\left(n_0 \cdot \frac{2\pi}{N} K\right)$

$Img\{X[K]\} = -sen\left(n_0 \frac{2\pi}{N} K\right)$

$$\boxed{X[K] = e^{-j n_0 \frac{2\pi}{N} K} = \cos\left(n_0 \frac{2\pi}{N} \cdot K\right) - j\, sen\left(n_0 \frac{2\pi}{N} \cdot K\right)}$$