Física III

LHAVANCI@FEI.EDU.BR

Eletrostática

Livro texto: Young, H.D. e Freedman, R.A "Sears e Zemansky Física III"
12ª edição, 2008

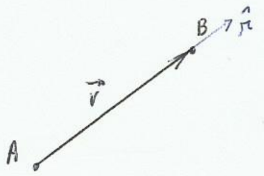
Eletrostática

Cap. 21, 22) P_1 ; 23 ; 24 — Avanci

Cap. 27, 28) P_1 ; 29 ; 30 — Arduino

(*) Exercícios complementares no moodle (todo Domingo será divulgado)

Revisão: Vetores

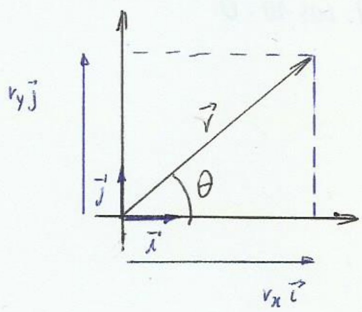


$\boxed{\vec{r} = +r \cdot \hat{r}}$

$|\vec{r}| = r$

$\hat{r}$: versor ; $|\hat{r}| = 1$

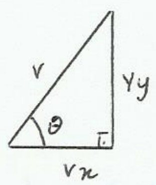
Em duas dimensões (x, y)



$\vec{r} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\,\text{sen}\theta\,\vec{j}$

$\vec{r} = +r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$

$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$



$\text{sen}\,\theta = \frac{r_y}{r}$

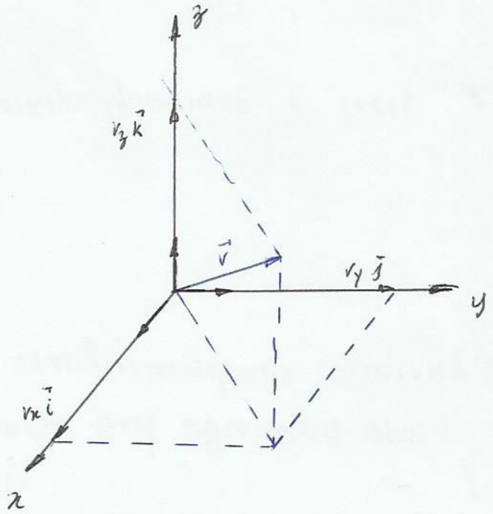
$\cos\theta = \frac{r_x}{r}$

$tg\,\theta = \frac{r_y}{r_x}$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{r_y}{r_x}\right)$

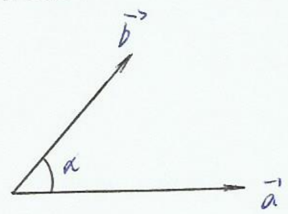
"Quando pedir a direção, quer dizer o angulo θ"

Em 3 Dimensão (xyz)



$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z i}$$

Produto Escalar



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\alpha$$

módulo (>0)

x em torno das componentes

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Regra

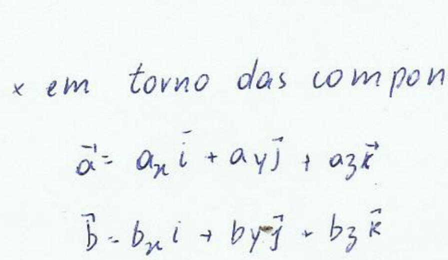
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{i} &= 1\\ \vec{j}\cdot\vec{j} &= 1\\ \vec{k}\cdot\vec{k} &= 1\end{aligned}}$$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{j}|.\cos 90 = 0$

$\vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

$\vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

Produto vetorial



$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\operatorname{sen}\alpha\,\hat{n}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\operatorname{sen}\alpha$$

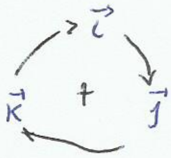
direção e sentido do vetor $\vec{c}$ é dada pela regra da mão-direita.

Para os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{i}| \operatorname{sen} 0 = 0$ $\quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{j} = 0$ $\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{k} = 0$ $\quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ $\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$



Ex: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $\qquad$ a) $\vec{a}.\vec{b} = -3$

$\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$ $\qquad$ b) $\vec{a} \times \vec{b} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$

a) $\vec{a}.\vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j}).(-\vec{j} + 2\vec{k})$

$= -2\cancelto{0}{(\vec{i}.\vec{j})} + 4\cancelto{0}{(\vec{i}.\vec{k})} - 3(\vec{j}.\vec{j}) + 6\cancelto{0}{(\vec{j}.\vec{k})}$

$= -3$

b) $\vec{a} \times \vec{b} = -2\underbrace{(\vec{i}.\vec{j})}_{\vec{k}} + 4\underbrace{(\vec{i}.\vec{k})}_{-\vec{j}} - 3\cancelto{0}{(\vec{j}.\vec{j})} + 6\underbrace{(\vec{j}.\vec{k})}_{\vec{i}}$

$= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$

Carga elétrica e eletrização

	Carga	Massa
elétron:	$-1{,}6 \times 10^{-19}$ C	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
próton:	$+1{,}6 \times 10^{-19}$ C	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

(C: Coulumb)

nº prótons > nº elétrons $\quad Q > 0$

"perde" elétrons (n)

nº prótons = nº elétrons $\quad Q = 0$

ganha elétrons (n)

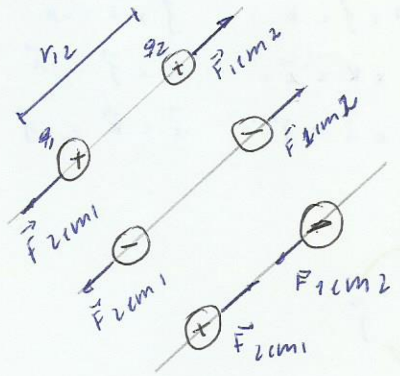
nº prótons < nº elétrons $\quad Q < 0$

$\boxed{Q = \pm n|e|}$ ("perde" / "ganha")

A carga é quantizada

n: nº de elétrons transferido

Lei de Coulomb => interação entre cargas elétricas



r_{12}: distância entre as cargas

Força elétrica => é vetor

- direção: é a da reta que une as cargas
- sentido: aproximação (sinais contrário)
  afastamento (sinais iguais)
- módulo: Lei de Coulomb = $|\vec{F}_{1em2}| = |\vec{F}_{2em1}| = \dfrac{k \cdot |q_1| \, |q_2|}{(r_{12})^2}$

$k = 9 \cdot 10^9 \ N \cdot m^2 / C^2$ -> Constante eletrostática

$k = \dfrac{1}{4\pi \epsilon_0}$; $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \ \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$ -> Permissividade elétrica do vácuo

$\hookrightarrow$ epsilon

Definindo versor $\hat{r}_{12}$, temos, para o caso 1

$$\vec{F}_{1em2} = + \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{2em1} = - \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

3ª Lei de Newton

$$\vec{F}_{1em2} = - \vec{F}_{2em1}$$

Para casa: Ex 21.22 e 21.23
pg. 32

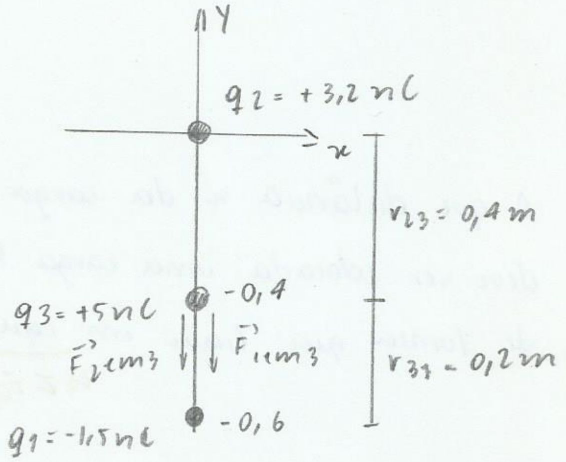
Ex. 21.19. 2 cargas puntiformes

$q_1 = -1{,}5\,nC$ em $x=0$ e $y=-0{,}6\,m$

$q_2 = +3{,}2\,nC$ em $x=0$ e $y=0$

$n = 1.10^{-9}$

Qual a força resultante sobre $q_3 = 5\,nC$ em $x=0$ e $y=-0{,}4\,m$



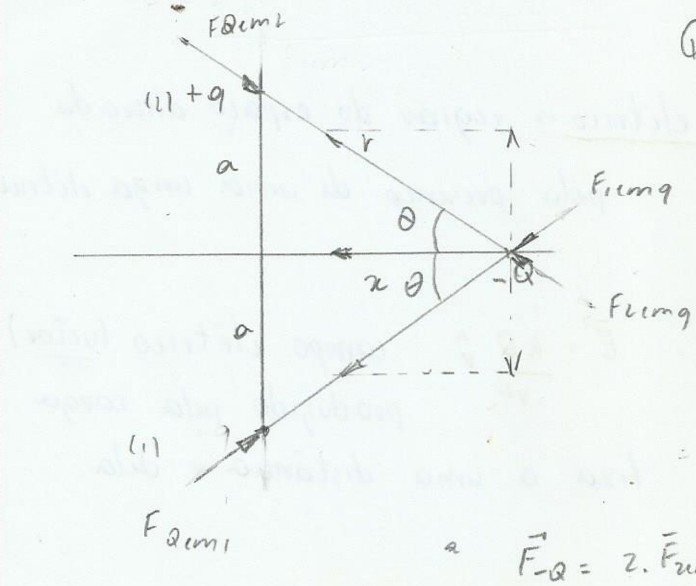
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{1em3} + \vec{F}_{2em3}$$

$$= -\frac{K q_1 q_2}{r_{13}^2} j - \frac{K q_2 q_3}{r_{23}^2} j$$

$$= -9.10^9 \left(\frac{1{,}5.5.10^{-18}}{0{,}2^2} + \frac{3{,}2.5.10^{-18}}{0{,}4^2} \right)$$

$$\therefore \vec{F}_r = 2{,}568.10^{-6}\,N$$

Ex: 21.22



Qua a força resultante sobre Q

$$F_{2emQ} = \frac{9.10^9 . q . Q}{r^2}$$

$$= F_{1emq} \quad \vec{F}_{2emq(x)} = \left| \frac{kq.Q}{r^2} \right| . \cos\theta$$

$$= \frac{kq.Q}{r^2} . \frac{x}{r} = \frac{kq.Q.x}{r^3}$$

$$\vec{F}_{-Q} = 2 . \vec{F}_{2emq(x)}$$

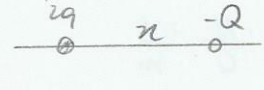
$$= \frac{2.\,kqQx}{r^3} ; \quad = \frac{2kqQx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

b) $\vec{F}_{-Q}$ quando $x=0$ $\quad F_{-Q} = 0$

c) $\vec{F}_{-Q}$ quando $x \gg a$

$$\vec{F}_{-Q} = \frac{2.Kq.Qx}{\left[x^2 \left(\frac{a^2}{x^2} + 1 \right)\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2kqQx}{x^3} \quad \therefore \vec{F}_{-Q} = \frac{2kqQ}{x^2} (i)$$

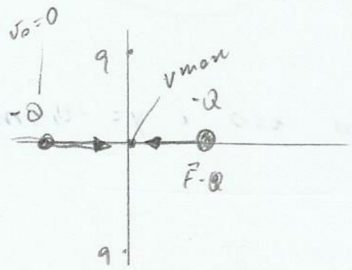
$\frac{a^2}{x^2} \to 0$



Obs: $(1 \pm x)^n = 1 + xn + \frac{n(n-1).x^2}{2!} + \dots$

d) $\vec{F}_{-Q}$ quando $x \ll a$

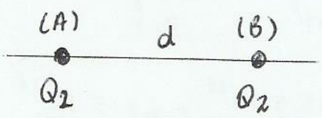
$$\vec{F}_{-Q} = \frac{-2kqQx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-2kqQx}{\left[a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{3/2}} = \frac{-2kqQx}{a^3}(\hat{i})$$



É MHS?

Calcule o período do movimento?

HOMEWORK



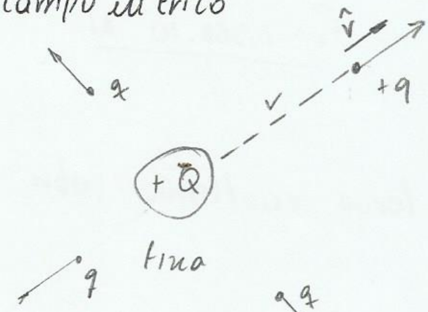
$Q_1 = -2Q_2$

$d = 10\,m$

A que distância x da carga Q_1 deve ser colocada uma carga Q_3 de forma que fique em equilíbrio?

$\hookrightarrow \Sigma \vec{F}_{Q_3} = 0$

* Campo elétrico



(carga "de prova" ou teste)

Campo elétrico → região do espaço alterada pela presença de uma carga elétrica.

$$\vec{F}_{Q\,em\text{-}q} = \vec{F} = +\left|\frac{kq.Q}{r^2}\right|\hat{r}$$

$$= q\underbrace{\left|\frac{kQ}{r^2}\right|\hat{r}}_{\vec{E}}$$

o sinal importa

$\therefore \vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$: campo elétrico (vetor) produzido pela carga fixa a uma distância r dela.

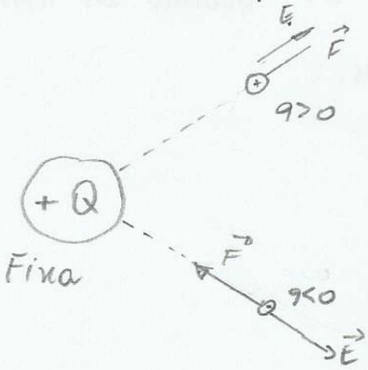
$\vec{F}_{em\,q} = q.\vec{E}$

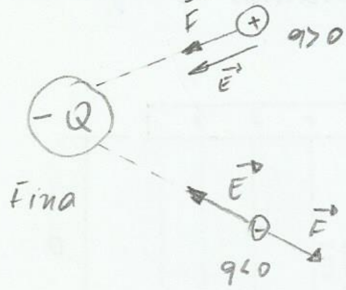
Levar em conta o sinal da carga

$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$

V: volt

* Linhas de campo



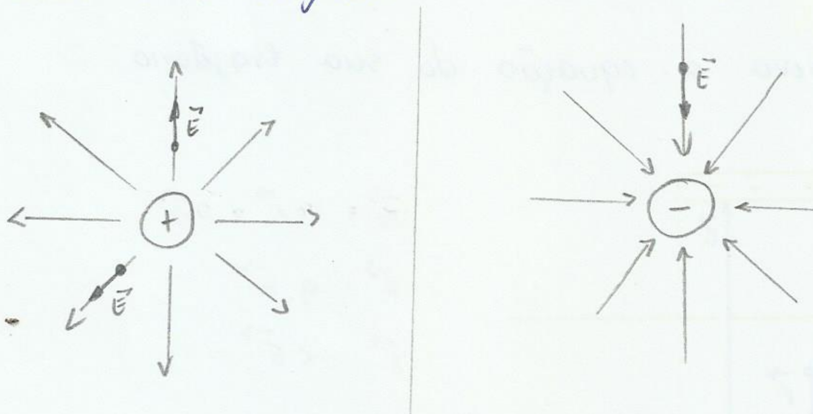


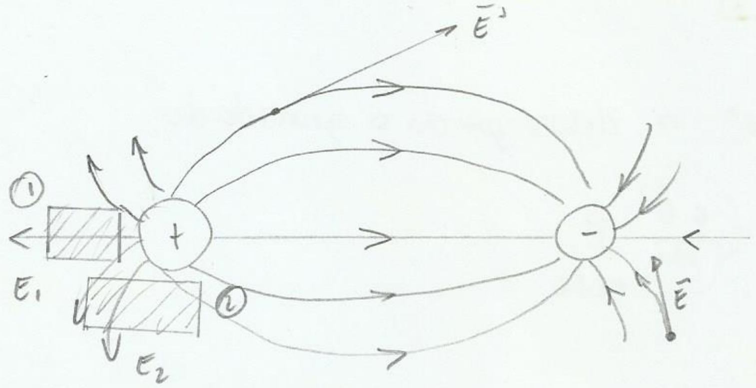
1ª Propriedade

Linhas de campo "saem" de cargas ⊕ e "chegam" em cargas ⊖

2ª Propriedade

O vetor $\vec{E}$ é tangente à linha de campo em qualquer ponto





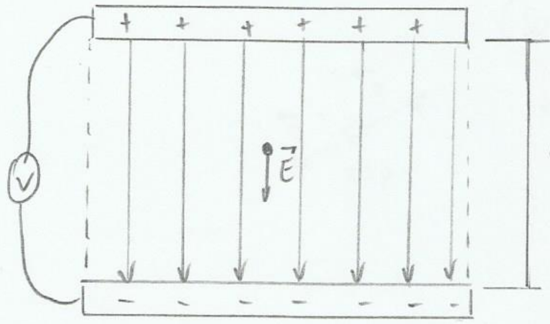
Fazer em casa

(+) (+)

3ª Propriedade: A intensidade do campo é maior onde mais linhas atravessam uma mesma unidade de área

$E_2 > E_1$

4ª propriedade: O campo é uniforme ($E = cte$) quando as linhas de campo são paralelas e igualmente espaçadas.



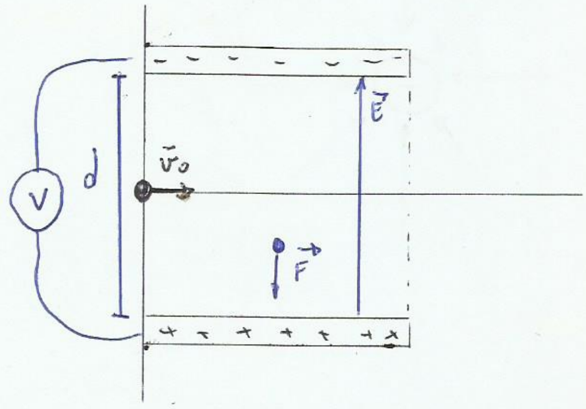
$$\boxed{E.d = V}$$

V: ddp entre as placas

Ex: 21.B - pg. 17 (Resolvido)

elétron ($q = -e$; m_e) é lançado em um campo $\vec{E}$ uniforme com $\vec{v} = v_0 \vec{i}$

Pede-se: escreva a equação da sua trajetória



$\vec{v_0} = v_0 \vec{i} + 0 \vec{j}$

$\vec{F} = q.\vec{E}$

$\vec{F} = -e\vec{E}$

$\vec{F} = -e.\vec{E} = m.\vec{a}$ => desprezando a gravidade

$$\vec{a} = \frac{-e.\vec{E}}{m} = \underbrace{\frac{-e\vec{E}}{m}}_{=cte}\vec{j}$$

em (Y): MRUV

$$y = \cancel{y_0}^{0} + \cancel{v_0 t}^{0} + \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}\frac{e\vec{E}}{m}t^2 \ (I)$$

em (x): MRU

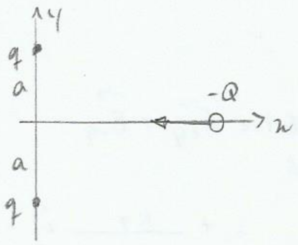
$$x = \cancel{x_0}^{0} + v_0 t \Rightarrow x = v_0 t$$

$$t = \frac{x}{v_0} \ (II)$$

I e II

$$y = -\frac{1}{2}\frac{e\vec{E}}{m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$$

Da aula passada



Para $a >> x$

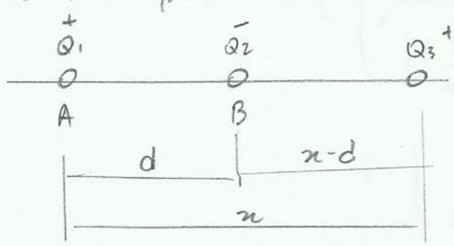
$$\vec{F} = \frac{-2kqQ}{a^3} x \cdot \vec{i} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

↳ é MHS

$$\vec{a}_{(1)} = \frac{-2kqQ'}{m \cdot a^3} x \, \vec{i} \qquad \vec{a}_{(1)} = -w^2 x \, \vec{i} \qquad T = \frac{2\pi}{w}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2kqQ}{ma^3}} \qquad x(t) = A\cos(wt + \theta)$$

Da aula passada



$Q = -2Q_2$

Q_3 equilíbrio $\rightarrow \sum \vec{F}_{Q3} = 0$

$F_{13} = F_{23}$

$$\frac{\cancel{k} Q_1 \cancel{Q_3}}{x^2} = \frac{\cancel{k} Q_2 \cancel{Q_3}}{(x-d)^2}$$

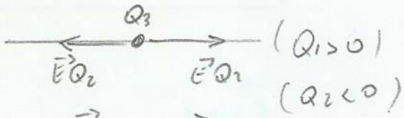
ou

$\vec{F}_{Q3} = Q_3 \vec{E}$

criado pelos Q_1 e Q_2:

$\vec{E} = \vec{E}_{Q1} + \vec{E}_{Q2}$

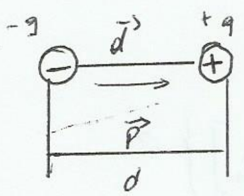
$E = 0$ no ponto se encontra Q_3



$|\vec{E}_{Q2}| = |\vec{E}_{Q1}|$

$$\frac{k \cdot Q_1}{x^2} = \frac{k Q_2}{(x-d)^2}$$

* Dipolo elétrico



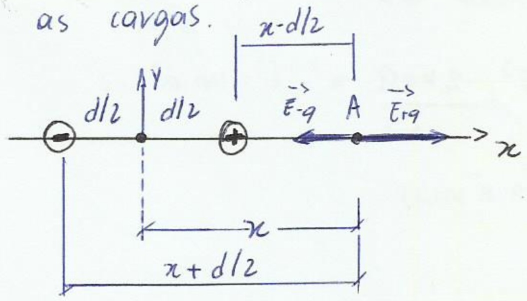
$|-q| = |+q| = q$

$\vec{d}$: $|\vec{d}| = d \rightarrow$ é a distância entre as cargas orientado de ⊖ -> ⊕

$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$: momento de dipolo elétrico

$[p] = C.m$

* Cálculo do campo produzido pelo dipolo em um ponto sobre a reta que une as cargas.



$$\vec{E}_{\text{total em } A} = \vec{E}_{+q} + \vec{E}_{-q}$$

$$= + \frac{kq}{(x-d/2)^2}\,\vec{i} - \frac{kq}{(x+\frac{d}{2})^2}\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{E}_{\text{total em } A} = kq \cdot \left\{ \frac{1}{(x-\frac{d}{2})^2} - \frac{1}{(x+\frac{d}{2})^2} \right\} \vec{i}}$$

Para $x \gg d$

$$\vec{E}_{\text{total em } A} = k.q. \left\{ \frac{1}{[x(1-\frac{d}{2x})]^2} - \frac{1}{[x(1+\frac{d}{2x})]^2} \right\} \vec{i}$$

$$= kq. \left\{ \frac{1}{(1-\frac{d}{2x})^2} - \frac{1}{(1+\frac{d}{2x})^2} \right\} \vec{i}$$

Obs: $(1+u)^n = 1 + nu + \dots \qquad 1 \gg u$

$$\left(1 - \frac{d}{2x}\right)^2 = 1 - 2.\frac{d}{2x} + \underbrace{\frac{d^2}{4x^2}}_{\approx 0}$$

$$\vec{E}_{\text{total em } A} = \frac{kq}{x^2} \left\{ \left(1-\frac{d}{2x}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2x}\right)^{-2} \right\}$$

$u = -\frac{d}{2x} \qquad u = \frac{d}{2x}$

$n = -2 \qquad n = -2$

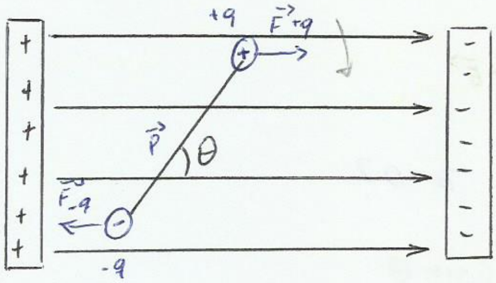
Usando $(1+u)^n = 1 + n.u$

$$\vec{E}_{\text{total em } A} = \frac{k.q}{x^2} \left\{ 1 + (-\cancel{2}).\left(\frac{-d}{\cancel{2}x}\right) - \left[1 + (-\cancel{2}).\frac{d}{\cancel{2}x}\right] \right\} \vec{i}$$

$$= \frac{kq}{x^2} \left\{ 1 + \frac{d}{x} - 1 + \frac{d}{x} \right\} \vec{i}$$

$$\vec{E}_{\text{total em } A} = \frac{k.q}{x^2} \left\{ \frac{2d}{x} \right\} \vec{i} = \frac{2k.\overbrace{q.d}^{p}}{x^3}\,\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{total em } A} = \frac{2k.p}{x^3}\,\vec{i} \quad x \gg d}$$

⊛ Dipolo em um campo elétrico uniforme



$\vec{F}_{+q} = +q \cdot \vec{E}$

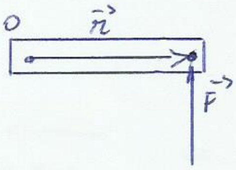
$\vec{F}_{-q} = -q \cdot \vec{E}$

$|F_{+q}| = |F_{-q}| = q \cdot E$

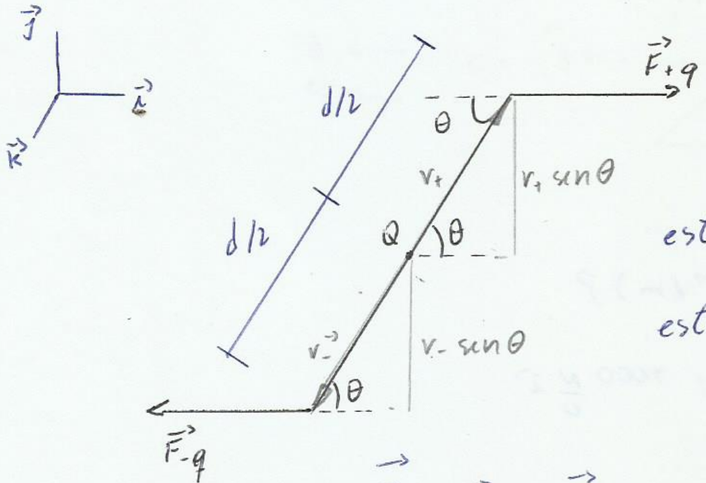
$\sum \vec{F}_{\text{sobre dipolo}} = \vec{F}_{+q} + \vec{F}_{-q} = 0 \Rightarrow$ equilíbrio de translação

$\sum \vec{\tau}_{\text{sobre dipolo}} = \vec{\tau}_{F_{+q}} + \vec{\tau}_{F_{-q}} \neq 0 \Rightarrow$ movimento de rotação

obs// τ: torque; $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$



$\Rightarrow$ Torque sobre o dipolo



$\vec{r}_+$, $\vec{r}_-$ e $\vec{F}$

estão no plano xy $\quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

está na direção do eixo z

$\vec{\tau}_{F_+} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+$

$$\vec{\tau}_{F_+} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+$$

$$= -r_+ F_+ \sin\theta \, \vec{k}$$

$$\boxed{= -\frac{d}{2} \cdot q \cdot E \sin\theta \, \vec{k}}$$

$$\vec{\tau}_{F_-} = \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

$$= -r_- \cdot F_- \sin\theta \, \vec{k}$$

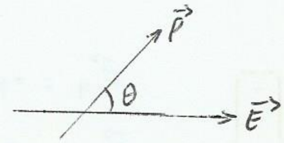
$$\boxed{= -\frac{d}{2} \cdot q \cdot E \sin\theta \, \vec{k}}$$

$\vec{\tau}_{\text{total sobre o dipolo}} = \boxed{-dq \cdot E \sin\theta \, \vec{k}}$

$$= -p \cdot E \sin\theta \, \vec{k}$$

$$\boxed{= \vec{p} \times \vec{E}}$$ Para $\vec{E}$ uniforme

Ex. 21-69 - pg 35: $\vec{p}$ em campo $\vec{E}$ uniforme



a) Para quais valores de θ o $\tau = 0$?

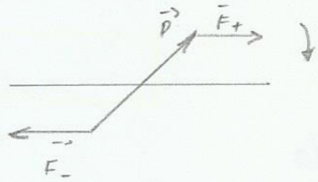
$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \Rightarrow |\vec{\tau}| = \tau = p \cdot E \operatorname{sen}\theta$

$\tau = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \text{ rad} \end{cases}$

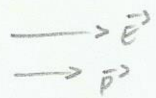
$\theta = 0$ $\longrightarrow \vec{E}$ $\longrightarrow \vec{p}$ Equilíbrio estável

$\theta = \pi$ $\longrightarrow \vec{E}$ $\vec{p} \longleftarrow$ Equilíbrio instável

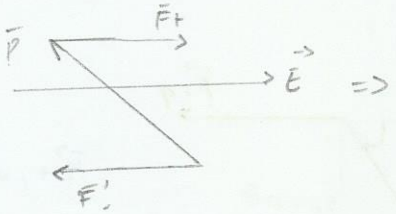
$\theta = 0$ $\longrightarrow \vec{E}$ $\longrightarrow \vec{p}$ $\Rightarrow$



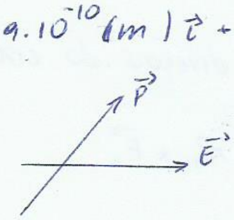
$\Rightarrow$



$\theta = \pi$ $\longrightarrow \vec{E}$ $\longleftarrow \vec{p}$ $\Rightarrow$



Ex) $\vec{p} = (9 \cdot 10^{-10} \text{ Cm})\,\vec{i} + (12 \times 10^{-10} \text{ Cm})\,\vec{j}$



$\vec{E} = 5000 \frac{N}{C}\,\vec{i}$

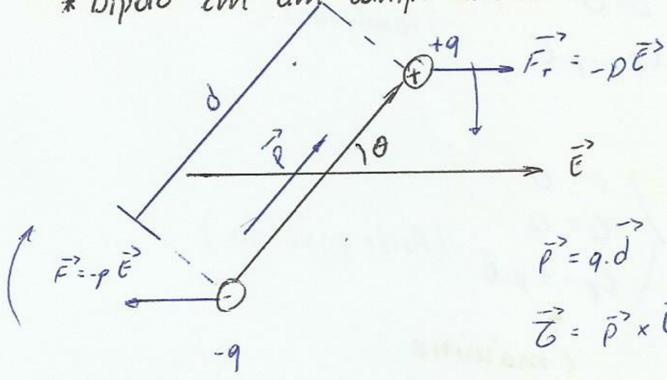
a) Calcule o $\vec{\tau}$ dipolo

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

$= (9 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} + 12 \times 10^{-10}\,\vec{j}) \times 5000\,\vec{i}$

$\therefore \boxed{\tau = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Nm } (-\vec{k})}$

* Dipolo em um campo uniforme



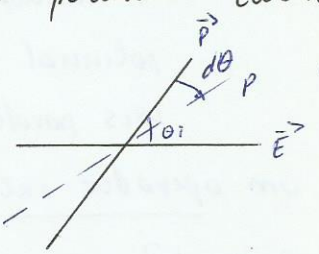
$\vec{p} = q.\vec{d}$

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$; $\tau = p.E \operatorname{sen}\theta$

$\vec{p} = q.\vec{d}$

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$; $\boxed{\tau = p.E \operatorname{sen}\theta}$

* Energia potencial elétrica do dipolo em um campo uniforme



$d\theta < 0$

$\boxed{dW = -\tau\, d\theta}$ ↳ pequeno deslocamento angular

"pequeno" trabalho realizado pelo campo

$dW = -dE_p = -\tau\, d\theta$

$dE_p = \tau\, d\theta$

$\int_{E_{pi}}^{E_{pf}} dE_p = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$ E_p: energia potencial $(= U)$

Usando $\tau = p.E \operatorname{sen}\theta$

$\int_{E_{pi}}^{E_{pf}} dE_p = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$E_{pf} - E_{pi} = p.E.\int_{\theta_i}^{\theta_f} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

$$\boxed{E_{pf} - E_{pi} = -\left[p.E\cos\theta_f - p.E\cos\theta_i \right]}$$

Para θ qualquer : $E_p(\theta) = -pE\cos\theta$

$$\boxed{E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

Para $\theta = 0 \Rightarrow$ $\longrightarrow \vec{E}$, $\longrightarrow \vec{p}$ $\begin{cases} F = 0 \\ \tau = 0 \\ E_p = -p.E \end{cases}$ (Paralelo)

Estável

Para $\theta = \pi \Rightarrow$ $\longrightarrow \vec{E}$, $\longleftarrow \vec{p}$ $\begin{cases} F = 0 \\ \tau = 0 \\ E_p = +p.E \end{cases}$ (Anti paralelo)

Instável

é máxima

Exercício Dipolo Elétrico em campo uniforme

$|+q| = |-q| = q = 9{,}5 \cdot 10^{-9}\,C$

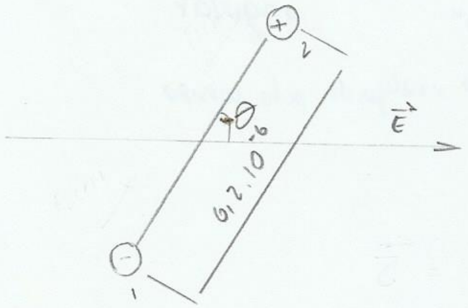
$d = 6{,}2 \cdot 10^{-6}\,m$

$E = 1100\ \frac{N}{C}\ (= \frac{V}{m})$

a) o módulo do momento do dipolo

b) a variação na energia potencial entre as orientações paralela e antiparalela.

c) Qual o trabalho realizado por um operador externo para mover o dipolo de $\theta = \pi/3$ até $\theta = \pi$ rad?



Formulário

$\vec{p} = q.\vec{d}$

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

$E_p = -\vec{p}.\vec{E}$

a)

$\vec{p} = q.\vec{d}$ (Momento de dipolo)

$\vec{p} = 1{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-6}$

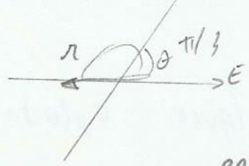
$\vec{p} = 9{,}3 \cdot 10^{-5}\,Cm$ ⇒ orientado de ⊖ para ⊕

b) $E_{p_f} - E_{p_i} = -[\,p.E \underbrace{\cos\pi}_{-1} - p.E \underbrace{\cos 0}_{1}\,]$

$= 2pE$

$= 2 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 1100$ $\therefore E_{p_f} - E_{p_i} = 2{,}046 \cdot 10^{-1}\,J$

c)



$W^{operador} = -W^{campo}$

$= \Delta E_p$

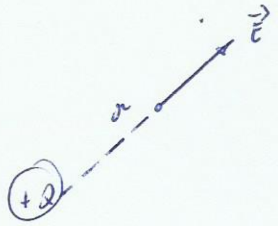
$W^{operador} = \Delta p = E_{pf} - E_{pi}$, com E_{pf} em $\theta = \pi$ e E_{pi} em $\theta = \pi/3$

$\rightarrow W^{operador} = -pE(\cos\pi - \cos\pi/3)$

$= -9{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 1100\,(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3})$

$= ?$

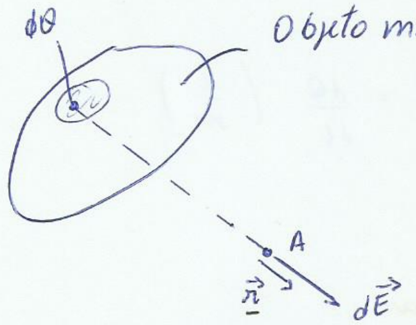
* Campo de uma carga puntiforme



$$\boxed{E = \frac{kQ}{r^2}}$$

* Campo de uma distribuição contínua de cargas

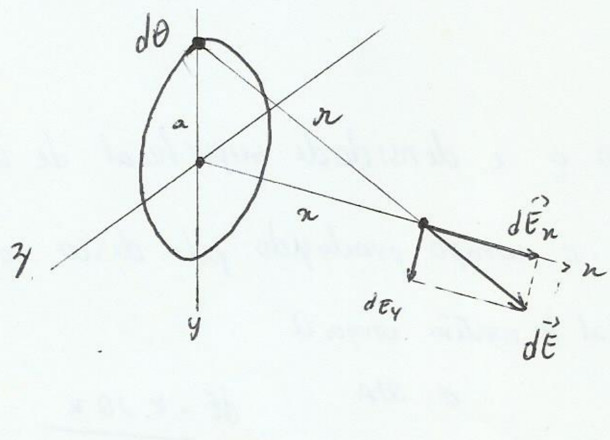
=> A distribuição é macroscópica



dQ produz $d\vec{E} = \frac{k\,dQ}{r^2}\,\hat{r}$ Q produz : $\vec{E} = \int d\vec{E}$ (todo o objeto)

$\vec{E} = \int \frac{k\,dQ}{r^2}\,\hat{r}$ todo o objeto

Exemplo: Anel carregado com carga $Q > 0$ e de raio $\underline{a}$, que está no plano yz. Determinar o campo produzido pelo anel em um ponto sobre o eixo x



$$dE = \frac{k.\,dQ}{r^2}$$

$$\vec{E}_{total} = \int_{todo\ anel} d\vec{E}$$

$$= \int_{todo\ anel} d\vec{E}_x + \cancel{\int_{todo\ anel} d\vec{E}_y} \to 0$$

por simetria

$$= \int_{todo\ anel} d\vec{E}_x$$

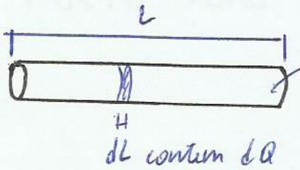
$$\vec{E}_{total} = \int_{todo\ anel} dE \cos\theta\, \vec{i}$$

$$= \int_{todo\ anel} \frac{k.dQ}{r^2} \cdot \frac{x}{r}\, \vec{i}$$

$$= \frac{k.x}{r^3} \int_{todo\ anel} dQ\, \vec{i} = \frac{k.x\, Q\, \vec{i}}{r^3}$$

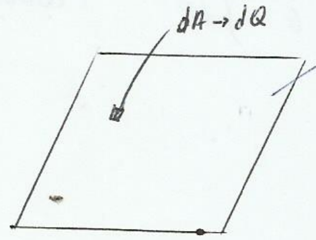
$$\boxed{\vec{E} = \frac{k.Q.x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, \vec{i}}$$

* Densidade linear (λ)



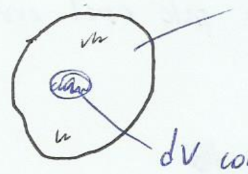
$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dQ}{dL} \left(\frac{C}{m}\right)$$

* Densidade superficial (σ) de carga



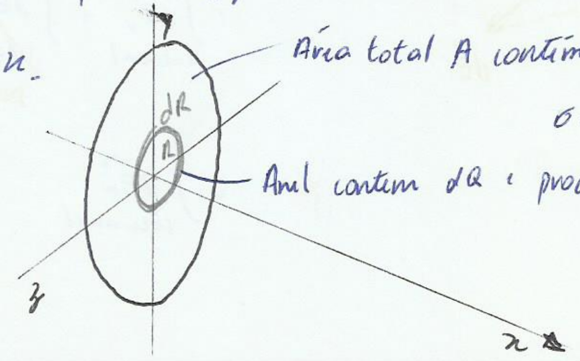
$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dQ}{dA} \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

* Densidade volumétrica (ρ)



$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{dQ}{dV} \left(\frac{C}{m^3}\right)$$

Exemplo Um disco de raio a e densidade superficial de cargas σ, está no plano yz. Calcule o campo produzido pelo disco sobre o eixo x.



$$\sigma = Q/A$$

$$dE = \frac{k.\, dQ.\, x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$\sigma = \dfrac{dQ}{dA} \rightarrow$ área do anel $\qquad d\vec{E} = \dfrac{k.\sigma dA. x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$

$\underline{dQ = \sigma dA}$ $\qquad dA = \ldots\ldots$ área do anel

$$\vec{E}_{disco} = \int_{\substack{todo\\disco}} d\vec{E} = \int_0^a \frac{k\sigma dA. x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$dA = 2\pi R. dR$? $\qquad dE = \dfrac{k\sigma 2\pi R dR x}{(R^2+x^2)^{3/2}} i$

$$E = \int_0^a \frac{k.\sigma 2\pi R dR x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

$$= k\sigma 2\pi x \int_0^a \frac{R dx}{(R^2+x^2)^{3/2}} i$$

$R^2+x^2 = t$

$2R\, dR = dt$

$R dR = \frac{1}{2} dt$

$$= \frac{k\sigma 2\pi x}{2}\int \frac{1}{t^{3/2}} dt = \frac{k\sigma 2\pi x}{2}\int t^{-3/2} dt$$

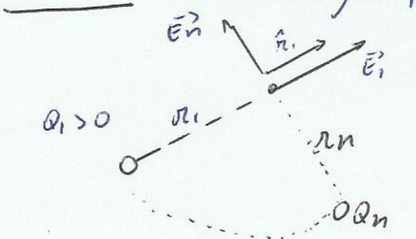
$$= \frac{k\sigma 2\pi x}{2} . \int \frac{t^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} dt = \frac{k\sigma 2\pi x}{2}\left(-\frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

$$= k\sigma 2\pi x . \left[-\frac{1}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]\Bigg|_0^a \vec{i}$$

$$\vec{E}_{total} = 2\pi k\sigma x\left[-\frac{1}{(a^2+x^2)^{1/2}} + \frac{1}{x}\right]\vec{i}$$

Resumo: Como determinar campo elétrico

1º caso: Para cargas puntiformes (pontuais)



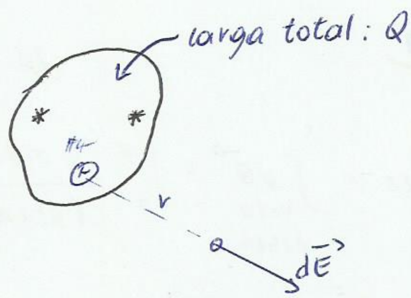
$\vec{E}_1 = \dfrac{kQ}{r_1^2}\hat{r}_1 \qquad \vec{E}_n = \dfrac{kQ_n}{(r_n)^2}\hat{r}_n$

Campo total $\quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \cdots + \vec{E}_n$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}$$

2º caso Para casos mascrocópico como

- -> Anel
- -> Disco
- -> Semi-circunferência



$$dE = \frac{k.dQ}{r^2}$$

$$\vec{E}_{total} = \int_{todo\ o\ objeto} d\vec{E}$$

3º caso Para distribuições de cargas com muita simetria, como por exemplo:

- -> esfera (ou casca esférica) carregada
- -> fio "infinito"
- -> cilindro "infinito"
- -> cabo coaxial "infinito"
- -> superfície plana "infinita"
- -> placas planas e paralelas "infinitas"

obs "infinito" => o ponto onde se quer calcular o campo está muito próximo da distribuição de cargas.

usa-se a Lei de Gauss (capít. 22) para determinar $\vec{E}$.

Cap 22: Fluxo do Campo Elétrico e Lei de Gauss

Φ: fluxo do campo elétrico

$[\Phi] = \frac{N}{C} \cdot m^2$ (no S.I.)

Fluxo = Intensidade . Área

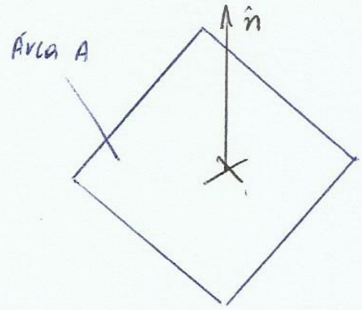
Fluxo = Intensidade . Área do campo

$\Phi = E . A$

é grandeza ESCALAR

é grandeza vetorial

⇒ construímos o vetor área $\vec{A}$:



$\hat{n}$: normal à superfície

sempre apontando para fora dela

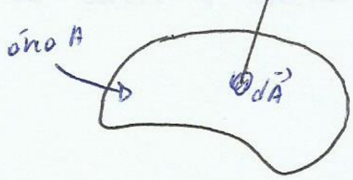
$\vec{A} = A.\hat{n}$

Assim: $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E.A.\cos\theta$ *

produto escalar

* Só vale $\vec{E} \cdot \vec{A} = E.A.\cos\theta$ quando θ é o mesmo em todos os pontos da superfície.

Onde o ângulo entre $\vec{E}$ e $\hat{n}$ não são constante, devemos dividir a superfície em pequenos elementos de área $d\vec{A}$ e escrever o fluxo $d\Phi$ através de $d\vec{A}$.



→ através de $d\vec{A}$:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

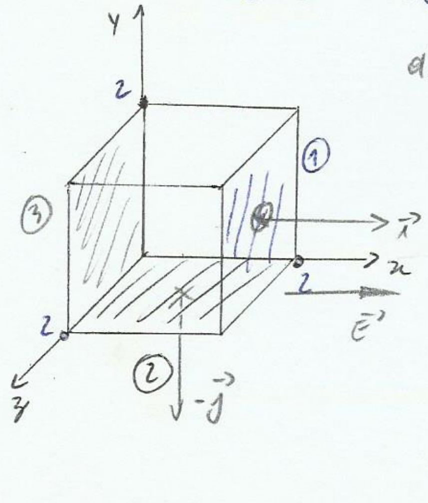
→ através de toda a superfície, o fluxo total é

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{\text{toda a superfície}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(Ex) $\vec{E} = 2000 \frac{N}{C} \hat{i}$ (campo uniforme)

Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através das superfícies

a) ① e b) ② da figura (0, pois o produto escalar é 0)



a) $d\vec{A} = dA\,\vec{i}$

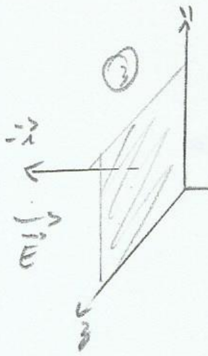
$\vec{E} = 2000 \frac{N}{C} \vec{i}$

$\Phi_{①} = \int_{①} \vec{E}\, d\vec{A} = \int_{①} 2000\,\vec{i} \cdot dA\,\vec{i}$

$\Phi = 2000 \int_{①} dA$ — Área da superfície 1

$\Phi = 2000 \cdot 4 \quad \therefore \quad \Phi = 8000 \frac{N}{C} \cdot m^2$

obs: através da superfície ③



$d\vec{A} = -dA\,\vec{i}$

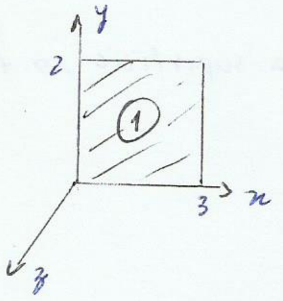
$\Phi_3 = -6000 \frac{N}{C} m^2$

obs.: O fluxo total, através da superfície fechada (6 lados do cubo) será

$\Phi_{total} = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i = zero!$

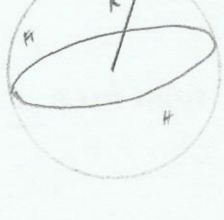
Isso ocorre por que não existe fonte de campo (carga elétrica) no interior da superfície fechada.

Ex. $\vec{E} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ (não é uniforme). Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da Superfície ① abaixo



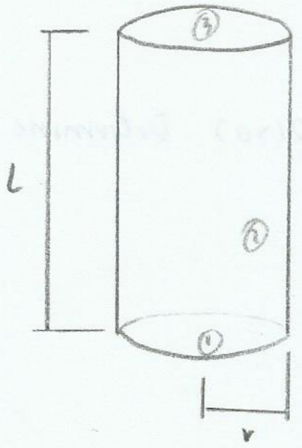
Integrais importantes

① Superfície esférica de raio R



$\int_{\substack{\text{superfície} \\ \text{esférica}}} dA = 4\pi R^2$

② Superfície cilíndrica de raio r e comprimento L



$\int_1 dA = \pi R^2$

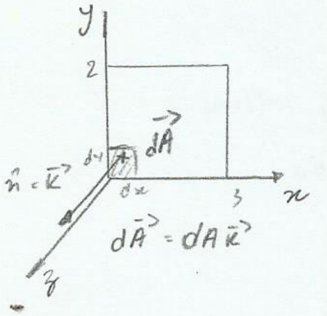
$\int_2 dA = 2\pi R L$

$\int_3 dA = \pi R^2$

Resolução do Ex

$\vec{E} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$; Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície

①



$$\Phi = \int_{superfície} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{①} (yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})\, dA\vec{k}$$

$$= \int xy\, dA\, (\vec{k} \cdot \vec{k}) \quad ; \quad dA = dx\, dy$$

$$= \int xy\, dx\, dy = \int_0^3 x\, dx \int_0^2 y\, dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{3^2}{2} \cdot \frac{2^2}{2} = 9\ \frac{Nm^2}{C}$$

$$\therefore \boxed{\Phi = 9\ \frac{Nm^2}{C}}$$

Lei de Gauss: "O fluxo de campo elétrico (das linhas de campo) através de qualquer superfície fechada é igual à carga líquida interna à superfície dividida por ε_0"

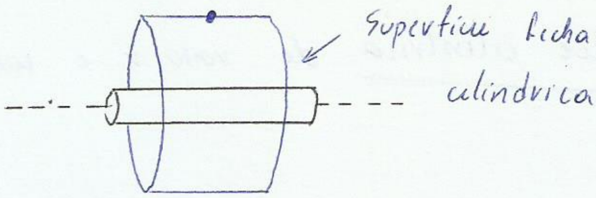
- $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$

$$\boxed{\Phi_{\text{superfície fechada}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{líq.\,interna}}{\varepsilon_0}}$$

- Escolha a superfície fechada que reproduz a simetria da distribuição de cargas é aquela onde $\vec{E} \parallel \vec{n}$ ou $\vec{E} \perp \vec{n}$ => Superfície gaussiana

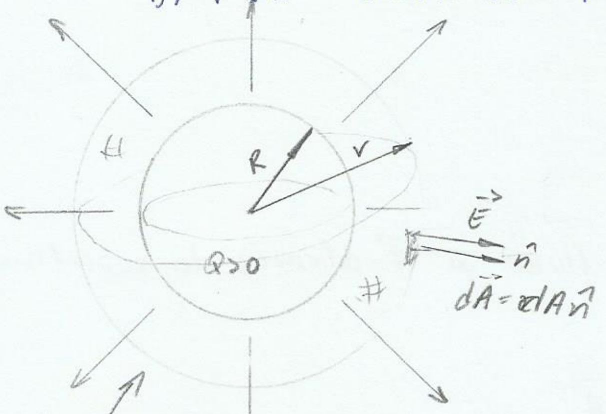
Ex: fio carregado



Ex: Esfera condutora, de raio R com carga total $Q(>0)$. Determine $\vec{E}$ usando a Lei de Gauss para:

a) $r > R$ (fora da esfera)

b) $r < R$ (dentro da esfera)



superfície esférica fechada de raio r

Em $dA \Rightarrow \vec{E} \parallel \hat{n}$

$$\begin{cases} \vec{E} = E\hat{n} \\ d\vec{A} = dA\,\hat{n} \end{cases}$$

<u>Lei de Gauss</u>

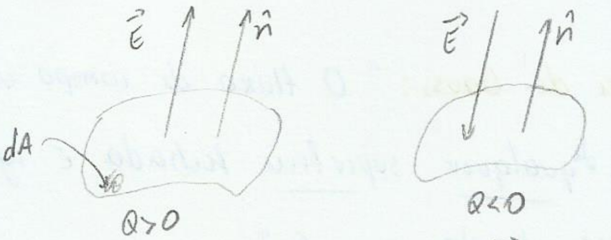
$$\Phi = \oint_{\substack{\text{superfície} \\ \text{esférica}}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{liq.\ interno}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\substack{sup. \\ esférica}} E\,dA\,\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{n})}_{1} = \frac{Q}{\epsilon_0} \sim E \underbrace{\oint_{\substack{sup \\ esférica}} dA}_{4\pi r^2\text{: Área da superfície esférica}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\hat{n} \quad \begin{matrix} Q>0 \\ r>R \end{matrix}}$$

$\hookrightarrow$ tem a direção radial



$\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$

$\vec{E}\cdot d\vec{A} = -E\,dA$

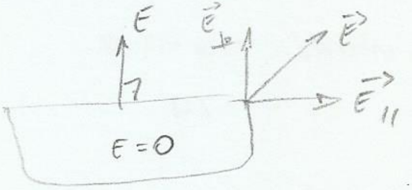
$$\boxed{E = -\frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \begin{matrix} Q<0 \\ r>R \end{matrix}}$$

b) $E=0$ para $r<R$

Sem corrente (condutor em equilíbrio), os elétrons livres ficam na superfície do condutor.

Analogo mecânico da lei de Ohm

$$\frac{I}{A} = J = \sigma E \Rightarrow \text{se } I=0,\ E=0$$



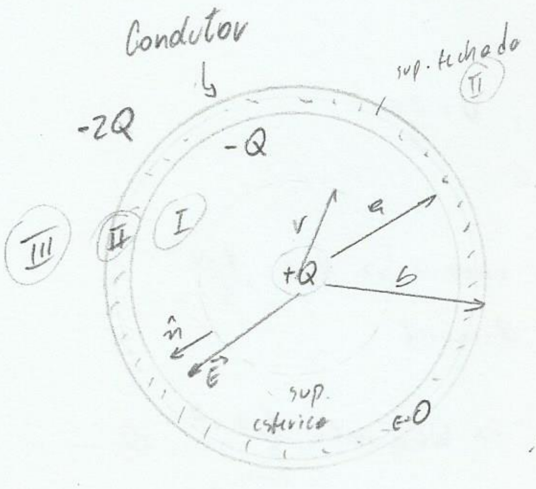
Na superfície, $\vec{E}$ é $\perp$ a ela, se não, a componente $\vec{E}_{\parallel}$ produziria uma corrente elétrica.

Ex 22.44 - pg67: Esfera oca condutora, com raio interno a e raio externo b, possui uma carga positiva +Q em seu interior. A carga total sobre a esfera oca é -3Q. Pede-se:

a) $\vec{E}$ para $\begin{cases} r < a \rightarrow \text{I} \\ a < r < b \rightarrow \text{II} \\ r > b \rightarrow \text{III} \end{cases}$

c) σ_{ext} [superfície externa, ($r=b$)]

b) σ_{int} [densidade superficial da carga na superfície interna ($r=a$) da esfera]



a) Para $r<a \Rightarrow$ I

$$\oint_{\substack{sup \\ esférica}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{liq.\,interna}}{\epsilon_0} \qquad \begin{cases} \vec{E} = E\hat{n} \\ d\vec{A} = dA\,\hat{n} \end{cases}$$

$$\oint_{sup.\,esférica} E\,dA = \frac{+Q}{\epsilon_0} \sim E \underbrace{\oint_{sup.\,esférica} dA}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{n} \quad r<a$$

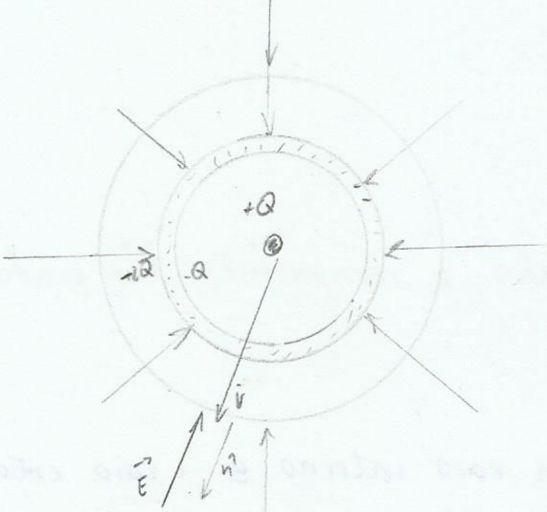
$\hookrightarrow$ radial, para fora da carga

× Para $a < r < b \Rightarrow$ II

$E = 0 \Rightarrow$ é condutor sem corrente elétrica

$$\oint_{II} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{liq.\,int}}{\epsilon_0} = 0 \qquad Q_{liq.\,int} = 0$$

× Para $r > b \Rightarrow$ III



$$Q_{liq.\,interna} = -2Q + Q - Q = -2Q$$

$$\oint_{III} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{liq.\,int}}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-2Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\,\hat{n} \quad r > b}$$

b) $\sigma_{int} = \frac{carga}{área} = \frac{-Q}{4\pi a^2}$ c) $\sigma_{ext} = \frac{-2Q}{4\pi b^2}$

Ex: Esfera isolante (= dielétrico), com raio R e densidade volumétrica ρ (>0, carga total Q),

a) $\vec{E}$ para $r > R$

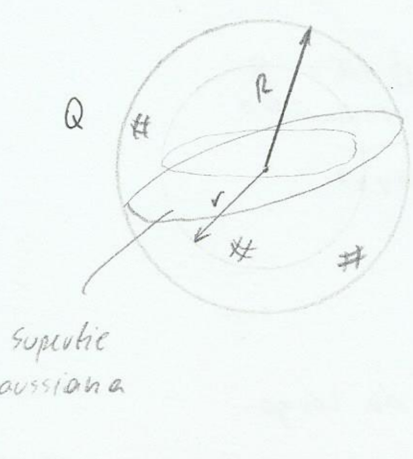
b) $\vec{E}$ para $r < R$

* A carga se distribui em toda o volume

a) $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{n}$ $Q > 0$, $r > R$

b) $r < R$

esfera toda $\begin{cases} \text{raio } R, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3} \\ \text{carga } Q \end{cases}$



superfície gaussiana: raio: $r \Rightarrow V_{int} = \frac{4\pi r^3}{3}$

carga: $Q_{liq.\,int}$.

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q_{liq.\,int}}{V_{int}} \Rightarrow Q_{liq.\,int} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot Q$$

$\Rightarrow Q_{liq.int.} = \frac{r^3}{R^3} \cdot Q$

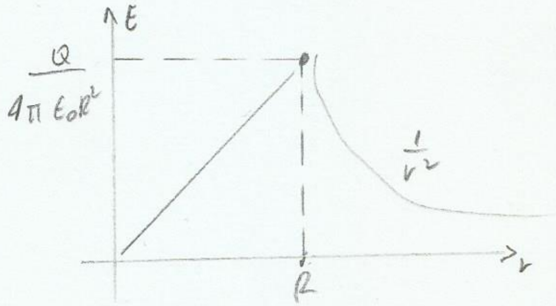
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{sup.\,esfer.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{liq.int}}{\epsilon_0}$$

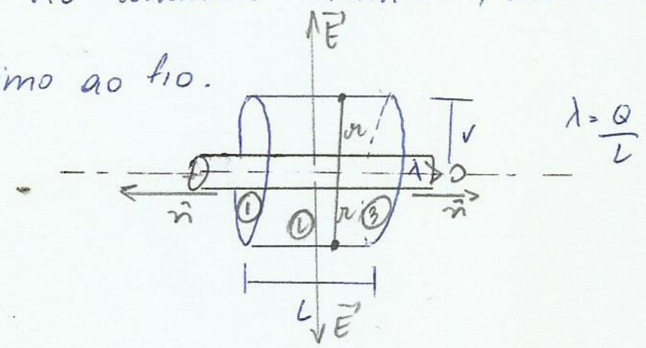
$$\therefore \boxed{E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3}\, r \cdot \hat{n} \quad r < R}$$

$$E \oint_{sup.\,esfe.} dA = \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gráfico que esboço o efeito



Ex. Fio condutor "infinito", com densidade linear $\lambda > 0$. Determine $\vec{E}$ próximo ao fio.



$$\oint_{sup.\,cilin.} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{liq.int}}{\epsilon_0} \sim \underbrace{\oint_{1} \vec{E}\, d\vec{A}}_{\vec{E} \perp \hat{n} = 0} + \oint_{2} \vec{E}\, d\vec{A} + \underbrace{\oint_{3} \vec{E}\, d\vec{A}}_{\vec{E} \perp \hat{n} = 0} = \frac{Q_{liq.int.}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{2,\ \vec{E} \parallel d\vec{A}} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{liq.int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_2 E\, dA = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \sim E \oint_2 dA = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \sim E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda \cancel{L}}{2\pi r \cancel{L} \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{n}\ ;\ \lambda > 0}$$

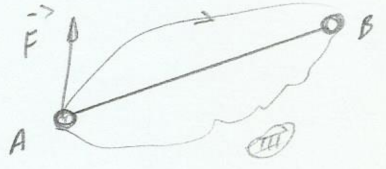
× Caso a carga fosse negativa, o campo seria negativo

* Assuntos para P2

=> Cap. 23: Energia potencial e potencial elétrico

=> Cap. 24: Capacitores e dielétricos

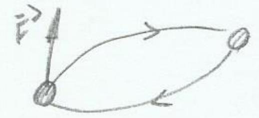
Revisão: Força conservativa, Trabalho e Energia



$$W^{\vec{F}}_{A\to B} = W^{\vec{F}}_{A\to B} = W^{\vec{F}}_{A\to B}$$
(I) (II) (III)

$\hookrightarrow \vec{F}$ é conservativa

Também vale



$W^{\vec{F}}_{\substack{percurso \\ fechado}} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ é conservativa

(*) Força elétrica conservativa

Q (fixa) q (prova) $F_{el} = \frac{K.Q.q}{r^2}$

$$W^{F_{el}}_{\substack{percurso \\ fechado}} = \int_A^A F_{el}.dr$$

$$= \int_A^A \frac{K.Q.q}{r^2}\,dr$$

$$= kQ.q \cancel{\int_A^A \frac{dr}{r^2}} \to 0$$

$$= kQq.\left(-\frac{1}{r}\right)_A^A = zero$$

Se a força é conservativa, podemos definir uma função da posição, chamada Energia Potencial (Ep), tal que

$$W^{\vec{F}}_{A\to B} = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

"gasto" de energia

(*) $\boxed{W_{A\to B}^{\vec{F}_{resultante}} = \Delta E_{cinética}}$

$= E_c(B) - E_c(A)$

(*) Se a força resultante é conservada

$$W_{A\to B}^{\vec{F}_{resultante}} = W_{A\to B}^{\vec{F}_{conservativa}}$$

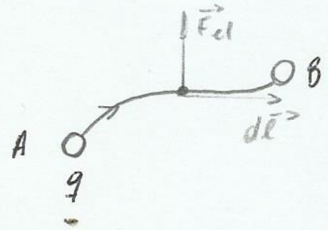
$$\boxed{\Delta E_c = -\Delta E_p}$$

(*) ~~Se a força resultante~~ ~~é conservativa~~

$\cancel{\Delta E_c = -\Delta E_p}$

(*) Energia potencial elétrica

$$W_{A\to B}^{\vec{F}_{el}} = -\Delta E_p = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot \vec{dl}$$



$\vec{dl}$: vetor deslocamento infinitesimal tangente a trajetória

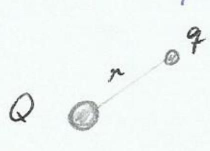
Então:

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}_{el} \cdot \vec{dl}$$

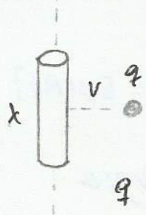
Como $\vec{F}_{el} = \pm q.\vec{E}$

$$\boxed{\Delta E_p = -q.\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}}$$ Variação da energia potencial elétrica

$\vec{E}$ depende da distribuição de cargas

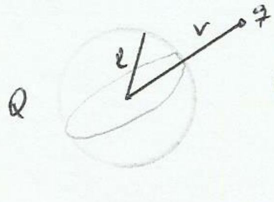


$\vec{E} = \frac{K.Q}{r^2}\hat{r}$

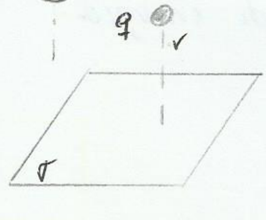


$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$

Fino



$\vec{E} = \frac{K.Q.}{r^2}\hat{r}$



$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{r}$

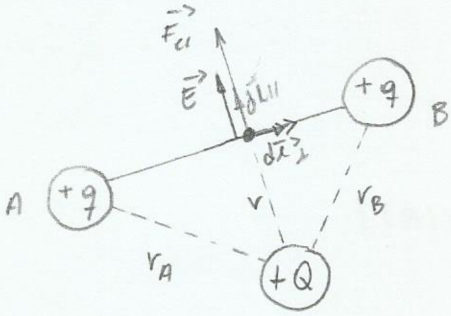
* **Definição**: ddp - diferença de potencial elétrico entre os pontos A e B

V: potencial elétrico

$$\boxed{\frac{\Delta E_p}{q} = \Delta V} \quad [V] = V \text{ (Volt)}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l}$$

* Cálulo da ΔE_p quando uma carga de prova q se move próxima a uma carga fixa Q.

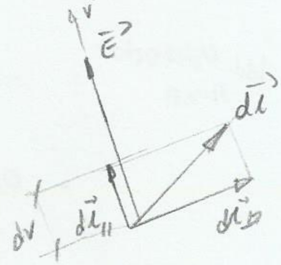


$$\vec{F}_{el} = q.\vec{E}$$

$$d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}$$

⇓ paralelo ao campo

⇓ perpendicular ao campo



$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$$

$$= -q\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$

$$= -q\int_A^B \vec{E}.(d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp})$$

$$= -q\int_A^B (\vec{E}.d\vec{l}_{\parallel} + \cancel{\vec{E}\, d\vec{l}_{\perp}}^{\,0})$$

$$\Delta E_p = -q\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}_{\parallel}$$

$$= -q\int_A^B \frac{K.Q}{r^2}\underbrace{\hat{r}.d\vec{l}_{\parallel}}_{dr}$$

Obs.: $\hat{r}.d\vec{l}_{\parallel} = |\hat{r}|.|d\vec{l}_{\parallel}|\cos\theta°$

$= 1.dl_{\parallel}.1 = dr$

$$\therefore \Delta E_p = -q.\int \frac{KQ}{r^2}dr = -KQ.q.\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -KQ.q\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$\Delta E_p = K.Qq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \rightarrow \boxed{E_p(B) - E_p(A) = \frac{KQq}{r_B} - \frac{KQq}{r_A}} \quad E_p(r) = \frac{KQq}{r}$$

Energia P. E_p de 2 cargas separadas por r

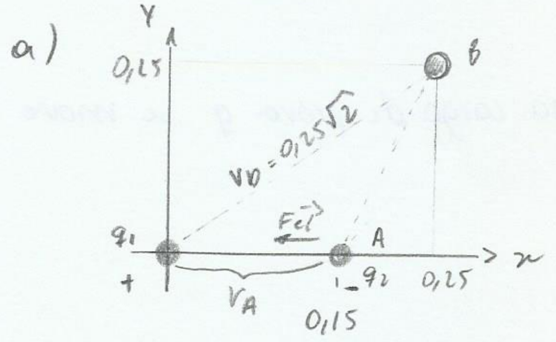
Ex: $q_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ C fixa em $(0,0)$

$q_2 = -4{,}3 \cdot 10^{-6}$ C em $P_1 = (0{,}15, 0)$

a) Calcule o trabalho realizado pela força elétrica quando a carga q_2 se desloca até $B = (0{,}15; 0{,}15)$

b) Calcule o $W_{A \to B}^{\text{operador}}$

a)



$$W_{A \to B}^{\vec{F_{el}}} = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

$$= -\left[\frac{K q_1 q_2}{r_B} - \frac{K q_1 q_2}{r_A}\right]$$

$$= -\left[\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot -4{,}3 \cdot 10^{-6}}{0{,}25\sqrt{2}} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot -4{,}3 \cdot 10^{-6}}{0{,}15}\right]$$

$$\therefore W_{A \to B}^{\vec{F_{el}}} = -0{,}356 \text{ J}$$

b) $$W_{A \to B}^{\text{operador}} = -W_{A \to B}^{F_{el}}$$

$$= 0{,}356 \text{ J}$$

Ex: O positrón ($m_p = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg e carga $+e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C), move-se próximo a uma partícula α (carga $q_\alpha = +2e = 3{,}2 \times 10^{-19}$ C e $m_\alpha >>> m_p$) O positron se afasta com $v_i = 3{,}0 \times 10^6$ m/s quando $d_i = 1{,}00 \times 10^{-10}$ m — só o positron se move

a) Qual a velocidade do positron quando $d_f = 2 \times 10^{-10}$ m?

b) E quando $d_f = \infty$?

a) $\Delta E_C = -\Delta E_P$

$$\Delta E_C = -\left[\frac{K\, q_p \cdot q_\alpha}{\cancel{d_f}} \xrightarrow{} 0 - \frac{K \cdot q_p \cdot q_\alpha}{d_i} \right] = \frac{9.10^9 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot 3{,}2.10^{-19}}{1.10^{-10}}$$

$\Delta E_C =$

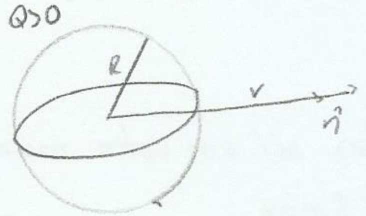
$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m_i v_i^2}{2} =$$

$$v^2 = \left(-1{,}44.10^{20} + \frac{9{,}11.10^{-31} \cdot (3{,}0.10^6)^2}{2} \right) \cdot \frac{2}{9{,}11.10^{-31}}$$

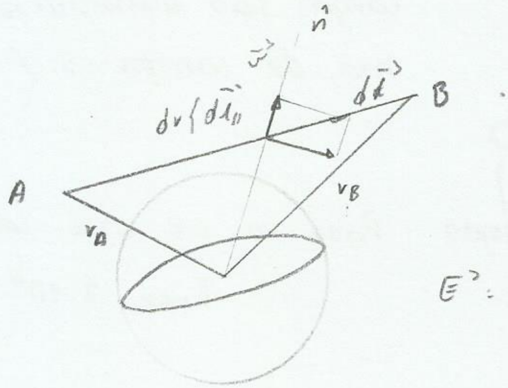
$\therefore\ v =$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

(Ex) Determinar a ddp ΔV entre dois pontos próximos a uma esfera condutora, de raio R e com carga $Q>0$.



$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{n} \qquad r>R$$



$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{n}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot(d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp})$$

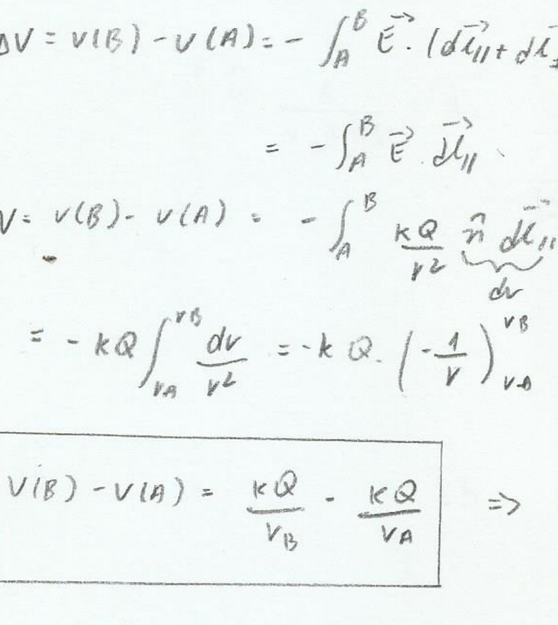
$$= -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}_{\parallel}$$

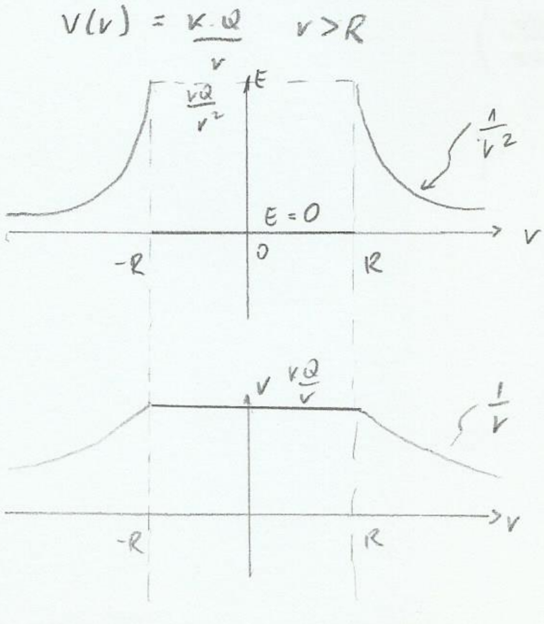
$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \frac{kQ}{r^2}\underbrace{\hat{n}\, d\vec{l}_{\parallel}}_{dr}$$

$$= -kQ\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -kQ\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_A}^{r_B}$$

$$\boxed{V(B) - V(A) = \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A}} \Rightarrow \text{para pontos fora dela}$$

$$V(r) = \frac{kQ}{r} \qquad r>R$$

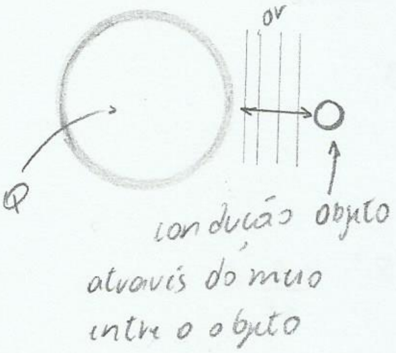




Para a $r=R$ (na superfície)

$$E = \frac{kQ}{r^2} = \left(\frac{kQ}{r}\right)\frac{1}{r} = \frac{V}{R}$$

$$V = R.E$$

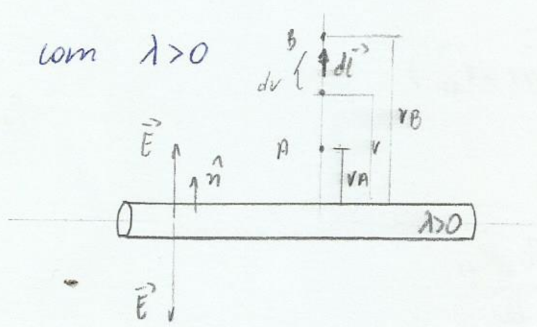


Cargas são acumuladas até um valor máximo do campo => $\begin{cases} E_{max} \\ V_{max} \end{cases}$

Para o ar esse campo máximo:

$$E_{MAX} = 3.10^6 \frac{V}{m}$$ → (campo de ruptura)

(Ex) Determinar a ddp ΔV entre 2 pontos próximos a um fio "infinito", carregado com $\lambda > 0$



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{n}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

$$= -\int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\underbrace{\hat{n}\,\vec{dl}}_{dr}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$$

(*) $\underbrace{V(A) - V(B)}_{V_{AB}} = \int_A^B \vec{E}\,\vec{dl}$

Exercícios:

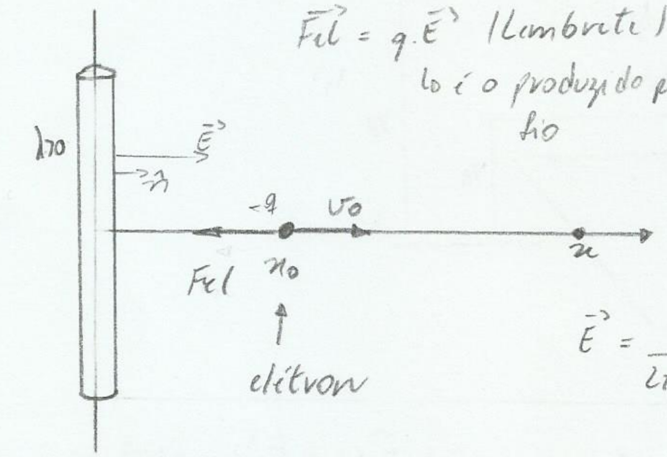
- Fio "infinito" com $\lambda = 5 \cdot 10^{-12}$ C/m

$x_0 = 4{,}0\,m$; $v_0 = 2{,}26 \cdot 10^5\,m/s$

$q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,kg$

Elétron é lançado de x_0 com v_0

Determine a posição x em que o elétron para se mover.



$\vec{F_{el}} = q \cdot \vec{E}$ (Lembrete) . $F = q \cdot E$

↳ é o produzido pelo fio

Elétron para quando a ddp = 0

$\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{n}$$

$$\boxed{\Delta E = -\Delta E_p = -q\,\Delta V}$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)$$

$$\cancel{\frac{mv^2}{2}}^{\,0} - \frac{mv_0^2}{2} = q\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{x_0}{x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x_0}{x}\right) = \frac{-mv_0^2 \cdot \pi\epsilon_0}{\lambda q}$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{\frac{-mv_0^2 \cdot \pi\epsilon_0}{\lambda q}} \cdot x_0$$

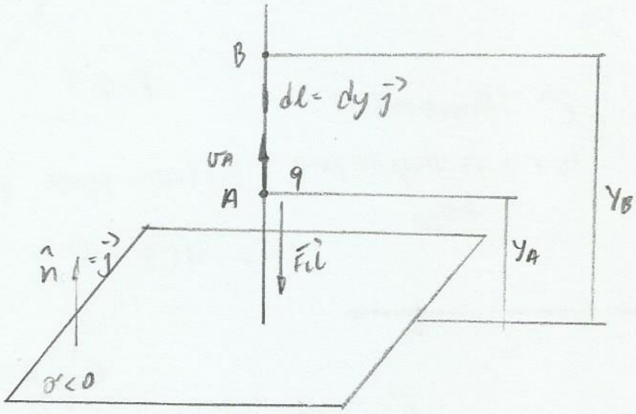
$$x = e^{\frac{-9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot (2{,}26 \cdot 10^5)^2 \cdot \pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-12} \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19})}} \cdot 4$$

$\therefore x = (31{,}86\,m)$

- Plano "infinito", carregado com $\sigma = -5.10^{-4}\ C/m^2$. Carga q é lançada com $v_A = 80\ m/s$, de um ponto A com $y_A = 6{,}5\ m$. Determine:

a) A maior distância y_B atingida pela carga

b) O tempo decorrido neste deslocamento $q = 1 \times 10^{-6}\ C$



$$\Delta Ec = -\Delta Ep = -q\,\Delta V$$

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\vec{j}$$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l}$$

$$= -\int_A^B \left(-\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)\vec{j}\,dy\,\vec{j}$$

$$= \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\int_{y_A}^{y_B} dy = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}(y_B - y_A)$$

$*\ \vec{F}_{el} = q.\vec{E} = -\frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0}\vec{j}$ } plano E é cte

$W = \vec{F}_{el} . \vec{\Delta y} = \Delta Ec$

$*\ \vec{F}_{el} = \frac{-q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\hat{\imath}$ } Fio infinito E não é cte

$W = \int \vec{F}_{el} . d\vec{r} = \Delta Ec$

Lembrete

$$\frac{m\cancel{v^2}^{\,\to 0}}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{q.|\sigma|}{2\varepsilon_0}(y_B - y_A)$$

$$(y_B - y_A) = \frac{+mv_0^2.\varepsilon_0}{+q.|\sigma|} \quad ;\ m = 0{,}02\ kg$$

$$y_B = \frac{0{,}02 . 80^2 . 8{,}85.10^{-12}}{1.10^{-6} . 5.10^{-4}} + 6{,}5 \quad \therefore\ y_B = 8{,}77\ m$$

b) $v_B = v_A - at$ (F_{el} = cte)

$$|F_{el}| = m|a| \quad \frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0} \therefore |a|\ t = \frac{v_A - v_B}{a} = \frac{(v_A - v_B).2\varepsilon_0}{q|\sigma|}$$

(*) $V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$

$\Rightarrow V(A) = 0$

$V = -\int \vec{E}\,\vec{dl}$

(*) Em 1-D (eixo x)

$\vec{E} = E_x \vec{i}$

$\vec{dl} = dx\,\vec{i}$

$V = -\int E_x\,dx\,\underbrace{(\vec{i} \cdot \vec{i})}_{1}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\int E_x dx\right\}$

$-\frac{\partial V}{\partial x} = E_x \qquad -\frac{dV}{dy} = E_y \qquad -\frac{dV}{dz} = E_z$

(*) Em 3-D

$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

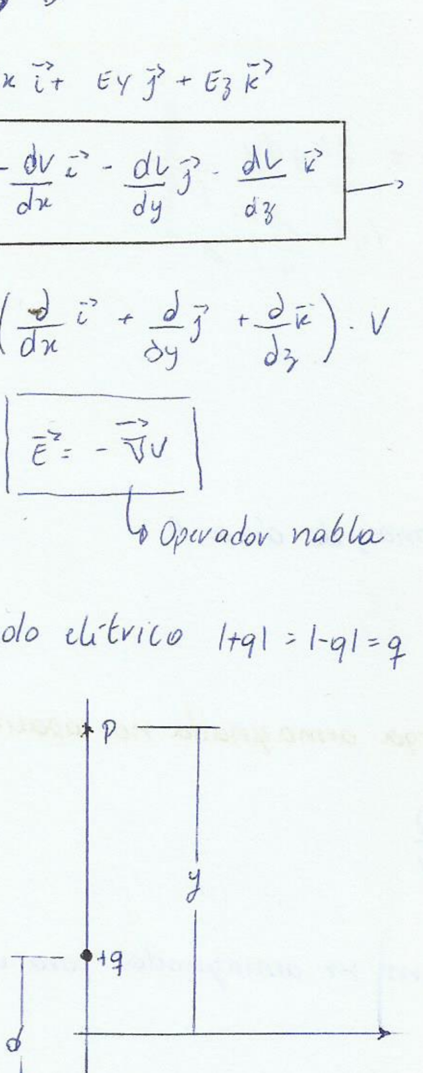
$\boxed{\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} - \frac{dV}{dy}\vec{j} - \frac{dV}{dz}\vec{k}} \longrightarrow V = V(x,y,z)$

$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{dx}\vec{i} + \frac{d}{\partial y}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}\right) \cdot V$

$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

→ Operador nabla

Ex: Dipolo elétrico $|+q| = |-q| = q$



a) Mostre que o potencial elétrico produzido pelo dipolo no ponto P é

$$V = \frac{K \cdot q \cdot d}{\left(y^2 - \frac{d^2}{4}\right)}$$

b) Determine o campo elétrico no ponto P

a) $V = V_1 + V_2$ $\qquad V = \frac{kq}{r}$

$$= \frac{kq}{(y-\frac{d}{2})} - \frac{kq}{(y+\frac{d}{2})}$$

$$= kq\left\{\frac{(y+\frac{d}{2})-(y-\frac{d}{2})}{(y-\frac{d}{2})(y+\frac{d}{2})}\right\} = kq\left(\frac{d}{y^2-\frac{d^2}{4}}\right)$$

$$\therefore V = \frac{kq \cdot d}{(y^2 - \frac{d^2}{4})} //$$

b) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left\{\frac{kq \cdot d}{(y^2-\frac{d^2}{4})}\right\}$$

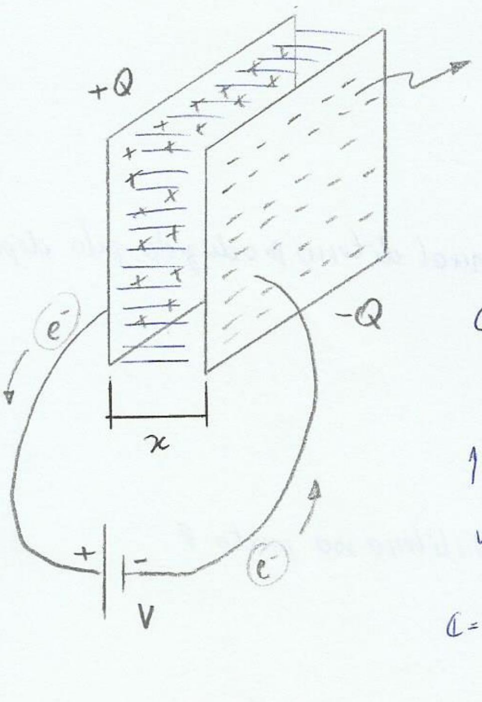
$$= -\vec{\nabla}\left\{kq \cdot d\left(y^2-\frac{d^2}{4}\right)^{-1}\right\}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left\{kq \cdot d\left(y^2-\frac{d^2}{4}\right)^{-1}\right\}$$

$$= kqd\left(y^2-\frac{d^2}{4}\right)^{-2} \cdot 2y \qquad \vec{E} = \frac{2kqdy}{(y^2-\frac{d^2}{4})^2}\vec{j} //$$

Fazer Ex: 23.86

Cap 24: Capacitância (C) e capacitores



placas condutoras planas, de área A

$|+Q| = |-Q| = Q$

↑ é a carga armazenada no capacitor

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \dots = \frac{Q}{V}$$

↑C mais cargas podem ser armazenadas para um mesmo valor de tensão

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (Farad)}$$

$\mu F = 10^{-6} F$

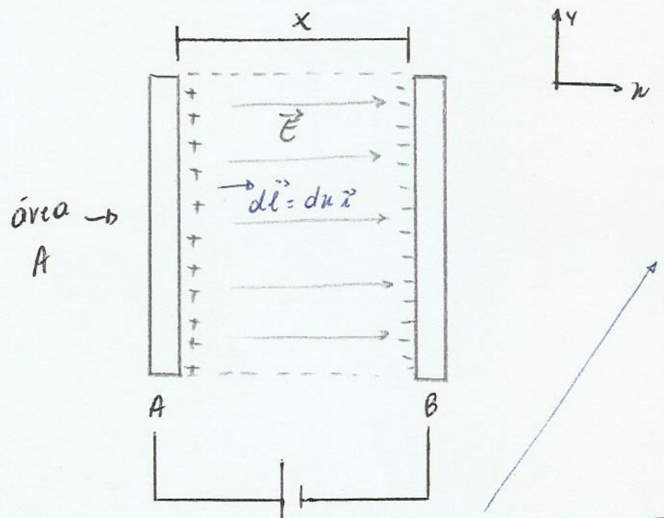
$nF = 10^{-9} F$

$pF = 10^{-12} F$

$fF = 10^{-15} F$

$\nearrow$
finto

* Capacitores de placas planas e paralelas (Importante)



$V_{AB} = V(A) - V(B)$

$$V_{AB} = +\int_A^B \vec{E}\,\vec{dl}$$

$$= +\int_A^B E_x\vec{i} \cdot dx\,\vec{i}$$

$$= \int_A^B E_x\,dx = E_x \int_A^B dx$$

$$\boxed{\therefore\ V_{AB} = E_x \cdot x}$$

Entre as placas: $E_x = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q \cdot \cancel{A}}{A\,\varepsilon_0}$

Assim: $V_{AB} = \dfrac{Q \cdot \cancel{A}}{A\,\varepsilon_0} \cdot x$

$$\frac{Q}{V_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 A}{x} = C$$

$$\boxed{C_{\text{placas planas}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{x}}$$

Obs.: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ => (Vácuo ou ar)

Ex: Qual seria a área A. Se $C = 1F$ e $x = 1mm$?

$$A = \frac{x\,C}{\varepsilon_0} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \quad \therefore A = 1{,}13 \cdot 10^{8} m$$

Ex: Calcule a capacitância de um capacitor esférico, formado por: esfera de raio r_a e carga $+Q$ e casca esférica de raio r_b e carga $-Q$

$$V_{AB} = V(A) - V(B)$$

$$= + \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{K.Q}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\int \frac{1}{r^2}\, dr = \int r^{-2}\, dr = \frac{r^{-1}}{-1}$$

$$= \int_A^B \frac{K.Q}{r^2}\, \underbrace{\hat{r}.\, d\vec{l}}_{dr}$$

$$= KQ \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\, dr = KQ\, (-1) \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = -KQ \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, Q \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, Q \left(\frac{r_A - r_b}{r_b r_A} \right)$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{r_b - r_A}{r_b r_A} \right)$$

$$\frac{Q}{V_{AB}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 (r_b . r_A)}{r_b - r_A} = C$$

$$\therefore \boxed{C_{esférico} = \frac{4\pi\varepsilon_0 (r_b . r_A)}{r_b - r_A}}$$

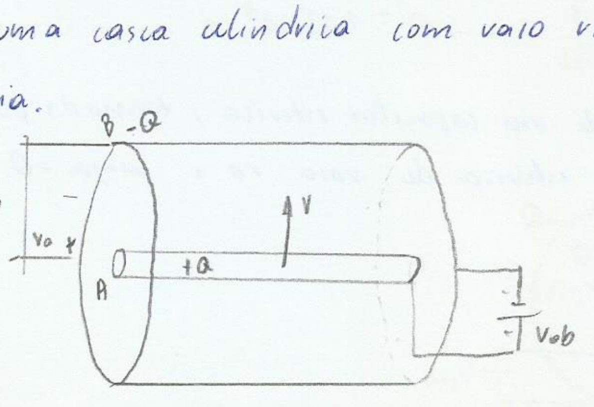
Ex: Terra => esfera interna de raio $r_a = R_T = 6,38.10^6$ m. Casca esférica externa com raio $r_b \to \infty$. Qual a capacitância da terra?

$$C = \frac{4\pi . \varepsilon_0 (r_b r_A)}{r_b - r_A} = \frac{\cancel{r_b}\,(4\pi\varepsilon_0 r_A)}{\cancel{r_b}\left(1 - \frac{r_a}{r_b}\right)}$$

$$= 4\pi . 8,85.10^{-12} . 6,38.10^6$$

$$= 7,095.10^{-4}\, F = 709,5.10^{-6}\, F = 709,5\, \mu F$$

Ex: Cabo coaxial => condutor interno cilíndrico, de raio r_A e carga $+Q$ envolvida por uma casca cilíndrica com raio r_b e carga $-Q$. Determine sua capacitância.



$\lambda = \frac{Q}{L}$ = densidade linear de cargas 2π

$$V_{ab} = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$= \int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\hat{r}\, dl}_{dr}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_b}\frac{1}{r}\, dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_b}{r_A}\right) = C$$