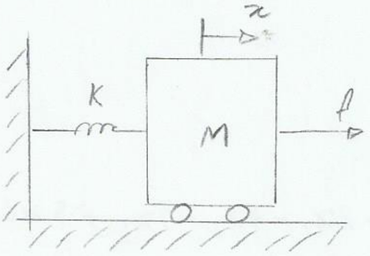
Controle Avançado

Cap 14 e 15 (livro texto)

Assuntos

- Representação no espaço de estados (EE)
- Analise e projeto de controladores no EE
- Observadores de estados

Espaço de Estados

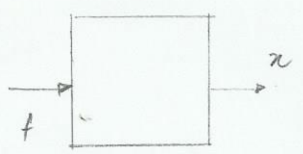


Conhecimentos das variaveis em um estante que pode auxiliar no calculo das outros variaveis

estados (z) - Informações internas do sistema
- Informações minimas

$x = z_1$
$\dot{x} = z_2$ $\Big\}$ $\dot{z}_1 = z_2$

$f - Kx = M\ddot{x}$



entrada (u)

f

saidas (y)

$x = z_1$
$\dot{x} = z_2$
$\ddot{x} = \dfrac{f - Kz_1}{M}$

Se $y = f(z, u)$ e $\dot{z} = g(z, u)$

é possivel usar espaço de estados

Modulo $M\ddot{x} + 0\dot{x} + Kx = f$

$\dot{z}_1 = z_2$

$\dot{z}_2 = \dfrac{f - Kz_1}{M}$

$\dfrac{z_1(t+\Delta t) + z_1(t)}{\Delta t} = \dot{z}_2(t)$

$\dfrac{z_2(t+\Delta t) + z_2(t)}{\Delta t} \approx \dfrac{f - Kz_1}{M}$

Modelo de estados: × Pode ser representado no domínio do tempo ou na frequência

× MIMO - Multiple-Input and Multiple-Output

Espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{(Equação de estado)}$$

$$y = Cx + Du \quad \text{(Equação de saída)}$$

EXEMPLO 14.5)

$$\dddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t)$$

3ª ordem → 3 equações

$$\begin{cases} y(t) = x_1 & \dot{x}_1 = \dot{y}(t) = x_2 \\ \dot{y}(t) = x_2 & \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = x_3 \\ \ddot{y}(t) = x_3 & \end{cases}$$

$$\dot{x}_3 + 3x_3 + 4x_2 + 2x_1 = 5u(t) \therefore \dot{x}_3 = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 14.6

$$\ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) - 2y_2(t) = u_1(t)$$

$$\ddot{y}_2(t) + y_2(t) - y_1(t) = u_2(t)$$

Duas equações de 2ª Ordem, logo temos 4ª ordem e 4 equações

$$\begin{cases} x_1 = y_1(t) & \dot{x}_1 = \dot{y}_1(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{y}_1(t) & \dot{x}_2 = \ddot{y}_1(t) = u_1(t) - 2x_2 - 2x_3 \\ x_3 = y_2(t) & \dot{x}_3 = \dot{y}_2(t) = x_4 \\ x_4 = \dot{y}_2(t) & \dot{x}_4 = u_2(t) - x_3 + x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

(Equação de Estado)

Equação de saída

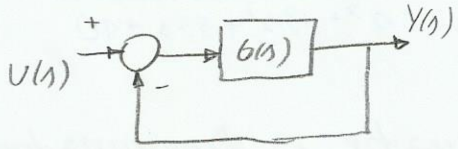
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

QUANDO O SISTEMA É DADO PELA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

- Efetua a Transformada Inversa de Laplace para $C.I.=0$

EXEMPLO 14.7

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3+5s^2+6s+10} \Rightarrow (s^3+5s^2+6s+10)\,Y(s) = 10\,U(s)$$

Aplicando a transformada inversa

$$\dddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10\,y(t) = 10\,u(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = y(t) & \dot{x}_1 = \dot{y}(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{y}(t) & \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = x_3 \\ x_3 = \ddot{y}(t) & \dot{x}_3 = \dddot{y}(t) = 10u(t) - 5x_3 - 6x_2 - 10x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{(Equação de Estado)}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(Equação de saída)}$$

Para FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA com zeros

EXEMPLO 14.8)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20(s^2+2s+17)}{s^3+13s^2+53s+40}$$

Multiplica Numerador e Denominador por $X(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20(s^2+2s+17)X(s)}{(s^3+13s^2+53s+40)X(s)}$$

Logo, temos: $Y(s) = 20(s^2+2s+17)X(s)$

$U(s) = (s^3+13s^2+53s+40)X(s)$

Realizando a transformada Inversa de Laplace

$$y(t) = 20[\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 17x(t)]$$

$$\hookrightarrow y(t) = 20\ddot{x}(t) + 40\dot{x}(t) + 340x(t)$$

$$u(t) = \dddot{x}(t) + 13\ddot{x}(t) + 53\dot{x}(t) + 40x(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = x(t) & \dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{x}(t) & \dot{x}_2 = \ddot{x}(t) = x_3 \\ x_3 = \ddot{x}(t) & \dot{x}_3 = \dddot{x}(t) = u(t) - 40x_1 - 53x_2 - 13x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & -53 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 340 & 40 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 14.9

$$\dddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 8y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

$$\hookrightarrow (s^3 + 3s^2 + 5s + 8)\,Y(s) = (2s + 1)\,U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(2s+1)\,X(s)}{(s^3+3s^2+5s+8)\,X(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,Y(s) = (2s+1)\,X(s)\,] \Rightarrow y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,U(s) = (s^3+3s^2+5s+8)\,] \Rightarrow u(t) = \dddot{x}(t) + 3\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 8x(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = x(t) & \dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{x}(t) & \dot{x}_2 = \ddot{x}(t) = x_3 \\ x_3 = \ddot{x}(t) & \dot{x}_3 = u(t) - 8x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$ (Equação de Estado)

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ (Equação de Saída)

VANTAGENS DA REPRESENTAÇÃO DE ESTADO

- Função de Transferência → apresenta limitações

As variáveis internas do sistema não são conhecidas

C.I=0

SISO

Para sistemas lineares

- Vantagens do espaço de estados:
  - × Formato matricial
  - × Sistemas lineares e não-lineares
  - × Desenvolvimento de métodos robustos e eficientes para simulação digital

Problemas Propostos

1. (a) $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u(t)$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = y(t) & \dot{x}_1 = \dot{y}(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{y}(t) & \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = u(t) - 3x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(b) $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 12y = u(t)$

$$\begin{cases} x_1 = y(t) & \dot{x}_1 = \dot{y}(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{y}(t) & \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = x_3 \\ x_3 = \ddot{y}(t) & \dot{x}_3 = u(t) - 5x_3 - 8x_2 - 12x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(c) $\dddot{x} + 6\ddot{x} + 64x = u(t) \rightarrow U(s) = (s^3 + 6s^2 + 64s)X(s)$

com $16(\dot{x} + 4x) = y(t) \qquad Y(s) = (16s^2 + 64s)X(s) \qquad \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

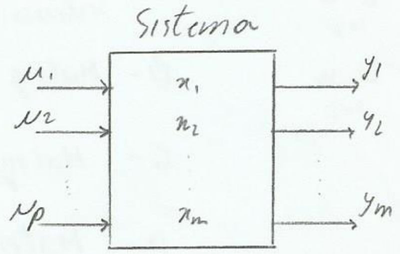
$$\begin{cases} x_1 = x(t) & \dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2 \\ x_2 = \dot{x}(t) & \dot{x}_2 = \ddot{x}(t) = x_3 \\ x_3 = \ddot{x}(t) & \dot{x}_3 = \dddot{x}(t) = u(t) - 6x_3 - 64x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados

24/02/2016



u: vetor de entrada

y: vetor de saída

x: vetor de estado

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad u \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Condições para ser estado

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

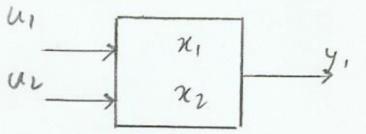
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Caso LINEAR

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

Ilustração do caso LINEAR



$$\dot{x}_1 = a_{11}(x_1) + a_{12}(x_2) + b_{11}(u_1) + b_{12}(u_2)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(x_1) + a_{22}(x_2) + b_{21}(u_1) + b_{22}(u_2)$$

$$y_1 = C_1(x_1) + C_2(x_2) + D_1(u_1) + D_2(u_2)$$

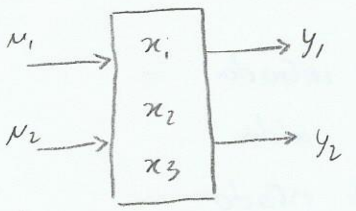
Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemplo:



$$\dot{x} = \underset{3\times3}{A}\,x + \underset{3\times2}{B}\,u$$

$$y = \underset{2\times3}{C}\,x + \underset{2\times2}{D}\,u$$

A- Matriz Dinâmica ou do Sistema

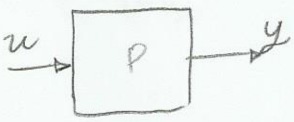
B- Matriz de entrada

C= Matriz de saída

D= Matriz de transmissão

Obtenção da equação de estado e de saída

$$\dddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t)$$



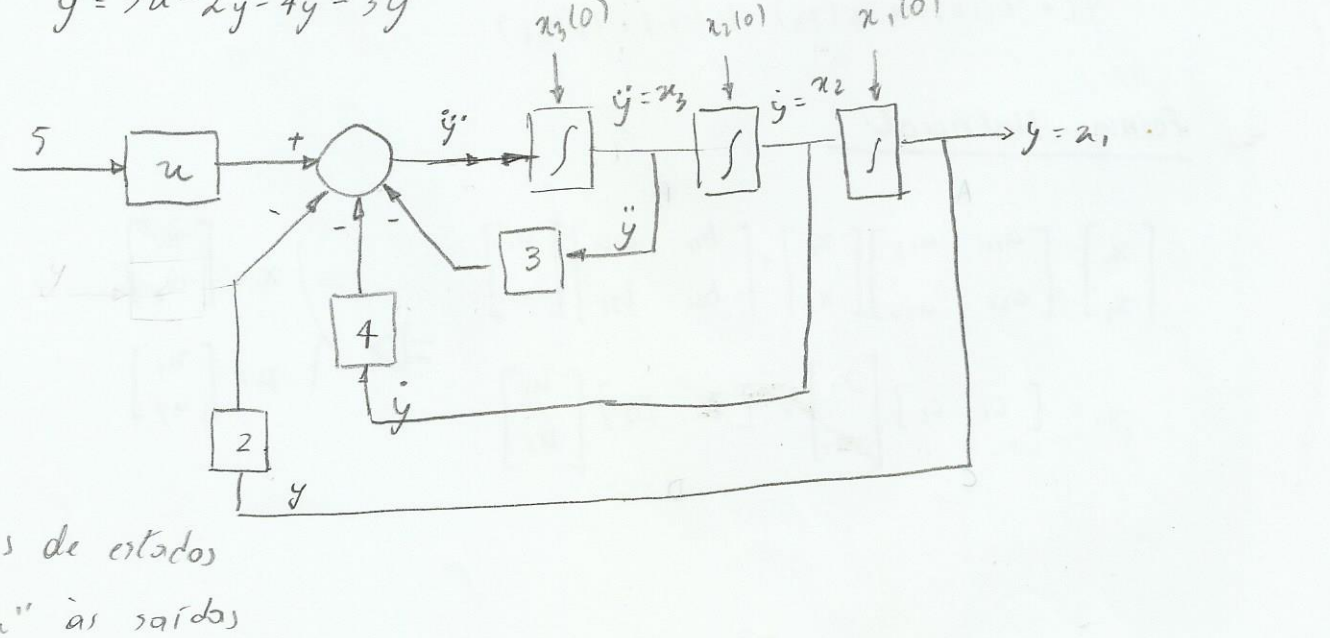
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y(t) \\ x_2 &= \dot{y}(t) \\ x_3 &= \ddot{y}(t) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y}(t) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y}(t) = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \dddot{y}(t) = 5y(t) - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\ u$$

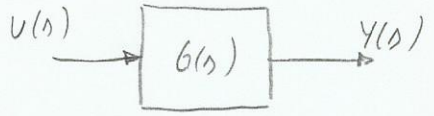
Diagrama de Blocos Associado

$$\dddot{y} = 5u - 2y - 4\dot{y} - 3\ddot{y}$$



Variáveis de estados de "base" às saídas dos integradores

Seja



$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s + 2}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow (s^2+3s+2)\,Y(s) = U(s)$$

Transformada Inversa

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u \qquad \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = u - 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Exemplo com zero

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 3u$$

SOLUÇÃO PELO POLINOMIO AUXILIAR

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = (s+3)X(s) \quad \rightarrow \quad y = \dot{x} + 3x$$

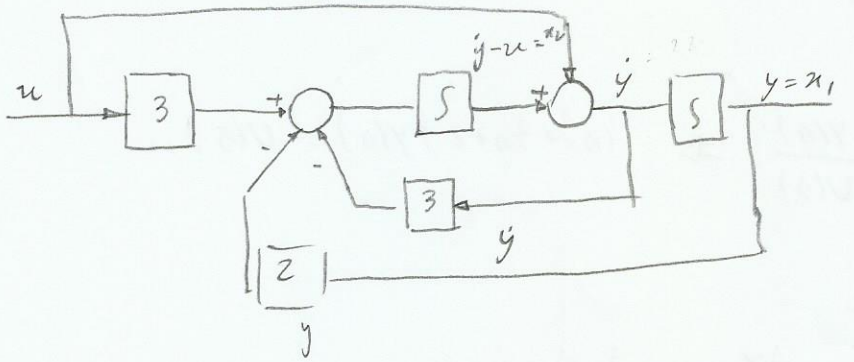
$$U(s) = (s^2+3s+2)X(s) \quad \rightarrow \quad u = \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$$

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dot{z}_1 = \dot{x} = z_2 \\ \dot{z}_2 = \ddot{x} = u - 3z_2 - 2z_1 \end{array} \qquad y = z_2 + 3z_1$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} z$$

Método do aluno



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 \;\; u - 2x_1 - 3(x_2 + u) \end{cases}$$

Bloco a partir da equação de estado

Ex:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$
$$\{ y = 3x_1 + x_2$$

Diagrama de Blocos Escalar

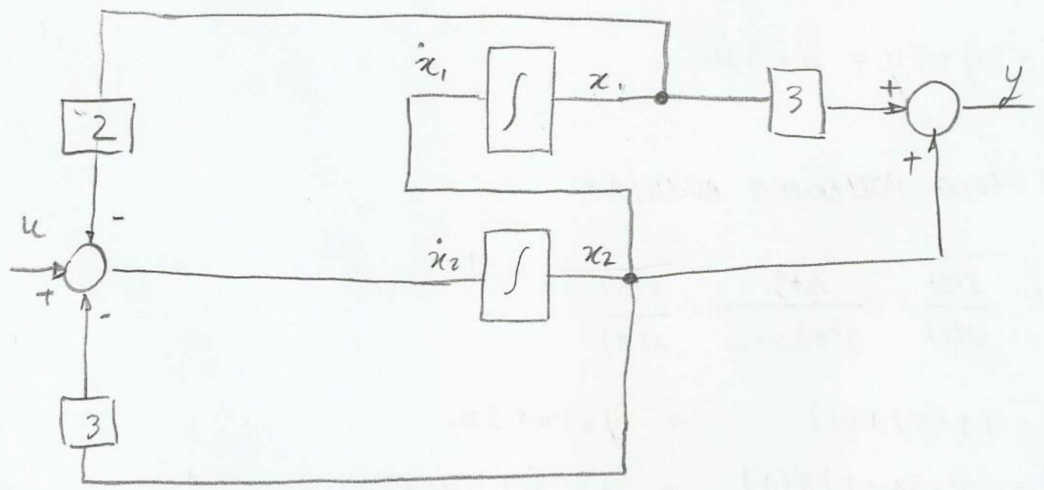
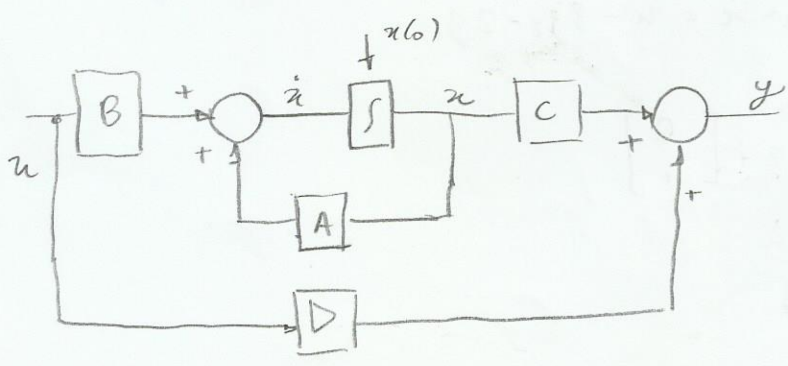


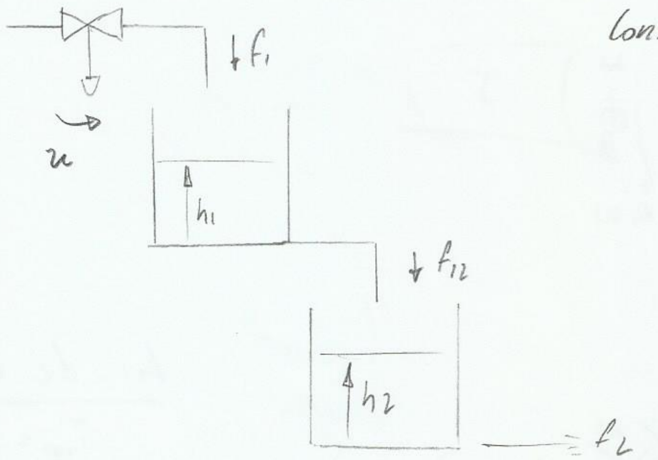
Diagrama de Blocos Vetorial / Matricial

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$



Exercícios: Obter a representação MOEE



Considere: $\begin{cases} f_1 = K_1 \mu_1 \\ f_{12} = K_{12} h_1 \\ f_2 = K_2 h_2 \end{cases}$

$$V(t+\Delta t) = V(t) + f_i(t)\Delta t - f_o(t)\Delta t$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \lim_{t \to \infty} \left(f_i(t) - f_o(t) \right) \quad \therefore \quad \frac{dV(t)}{dt} = f_i(t) - f_o(t)$$

Sabendo $\frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt}$ $\therefore$ $A \frac{dh(t)}{dt} = f_i(t) - f_o(t)$

$$A_1 \dot{h}_1 = K_1 \mu_1 - K_{12} h_1$$
$$A_2 \dot{h}_2 = K_{12} h_1 - K_2 h_2$$

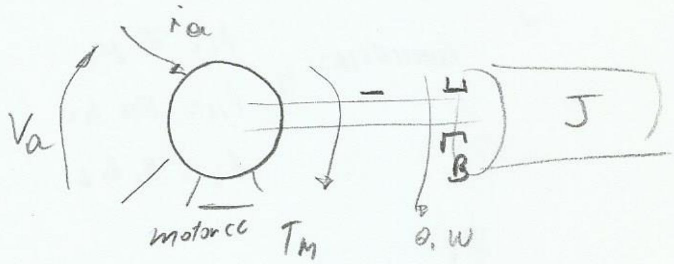
$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_{12}}{A_1} & 0 \\ \frac{K_{12}}{A_2} & -\frac{K_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

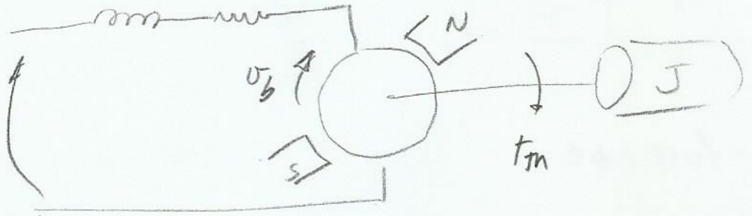
Para saída $y = \begin{cases} f_1 \\ f_{12} \\ f_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{cases}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{12} & 0 \\ 0 & K_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

②



$T_m = K_m i_a$



$V_b = K_m w$

Lei de Lens

$T_m = K_m i_a$

$V_b = K_m w$

LKT no circuito de armadura

$$V_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + V_b(t)$$

$$\mathcal{L}_{i=0} \quad V_a(s) + R_a i_a(s) + L_a s\, i_a(s) + V_b(s) \qquad (I)$$

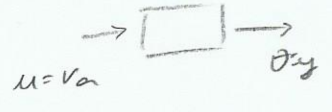
TMA eixo do motor

$$T_m(t) - B.w(t) = J\dot{w}(t)$$

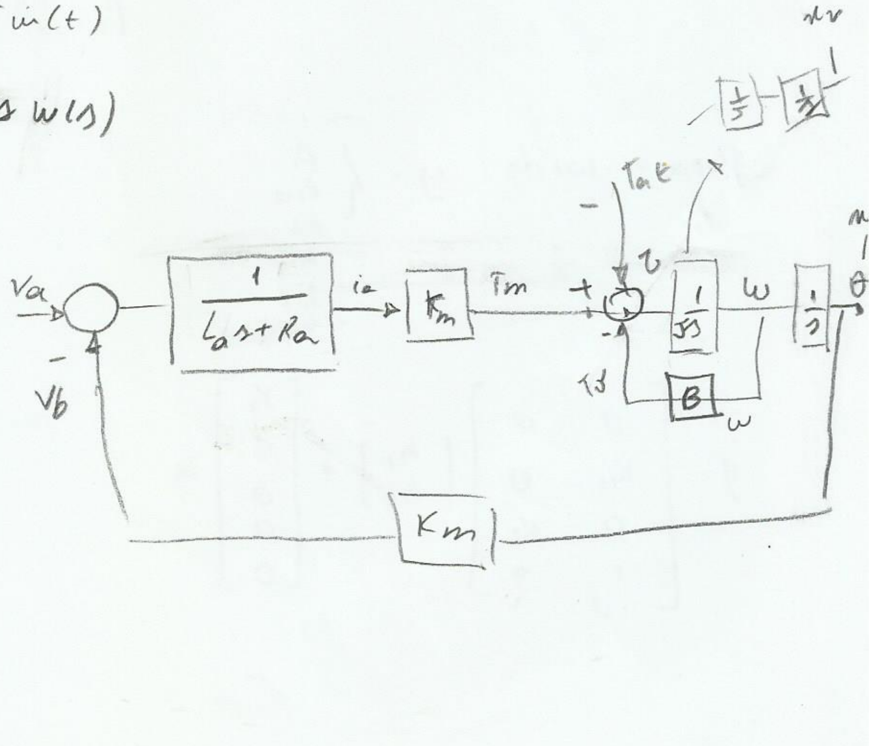
$$\mathcal{L} \quad T_m(s) - B w(s) = Js\, w(s)$$

Diagrama de blocos

Para



$V_a - V_b = (R_a + L_a s) i_a$

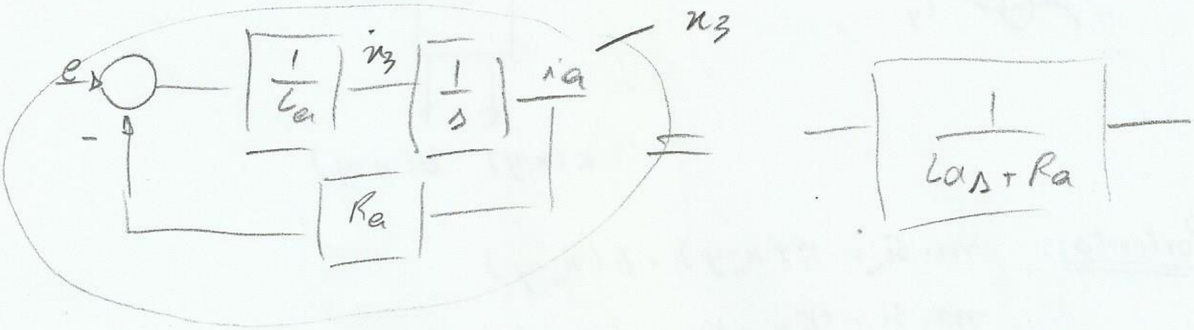


$$\frac{i_a(s)}{e(s)} = \frac{1}{L_a s + R_a}$$

$$i_a(s)\,(L_a s + R_a) = e(s)$$

$$L_a \frac{d i_a(t)}{dt} + R_a\, i_a(t) = e(t)$$

$$\frac{d i_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a}\left(e(t) - R_a\, i_a(t)\right)$$

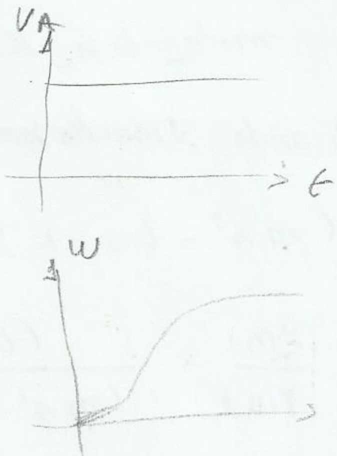


$y = x_1$

$\dot{x}_1 = x_2$

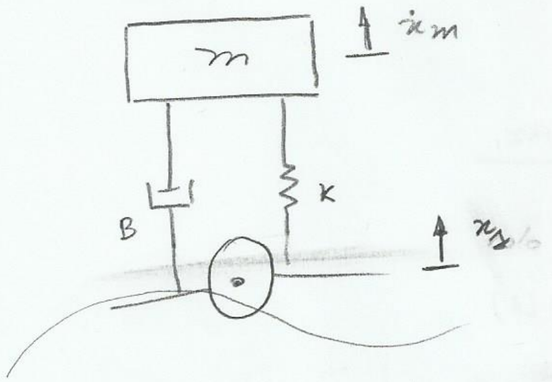
$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}\left(K_m \cdot x_3 - B x_2\right)$

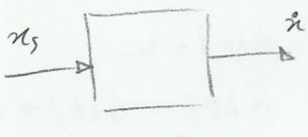
$\dot{x}_3 = \frac{1}{L_a}\left(\underbrace{V_a - K_m x_2}_{e} - R_a x_3\right)$



— 1 —

(3)





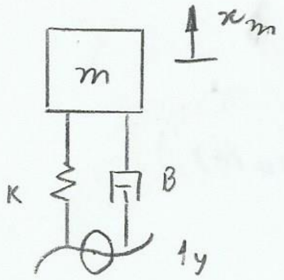
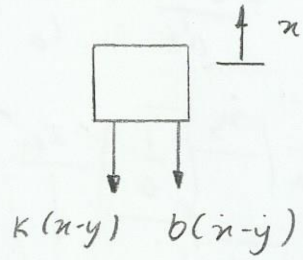


Diagrama do Corpo livre



Portanto:

$$m \cdot \ddot{x}_m = K(x_m - y) + b(\dot{x}_m - \dot{y})$$

$$m \cdot \ddot{x}_m = Kx_m - Ky + b\dot{x}_m - b\dot{y}$$

$$m \cdot \ddot{x}_m - b\dot{x}_m - Kx_m = -b\dot{y} - Ky$$

Aplicando transformada de laplace

$$(ms^2 - bs - K)\,X_m(s) = (-bs - K)\,Y(s)$$

$$\frac{X_m(s)}{Y(s)} = \frac{(-bs-K)}{(ms^2-bs-K)} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,X_m(s) = (-bs-K)X(s)\,] = x_m(t) = -b\dot{x}(t) - Kx(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\,Y(s) = (ms^2 - bs - K)X(s)\,] = y(t) = m\ddot{x} - b\dot{x} - Kx(t)$$

$x_1 = x(t)$ $\quad \dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2$

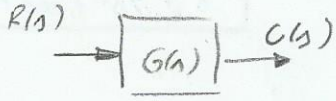
$x_2 = \dot{x}(t)$ $\quad \dot{x}_2 = \ddot{x}(t) = \dfrac{y(t) + bx_2 + Kx_1}{m}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K}{m} & \frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} y(t)$$

$$x = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(NISE)

Para $G(s) = \frac{24 \; C(s)}{\underbrace{s^3+9s^2+26s+24}_{R(s)}}$, represente no espaço de estados



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

↳ Multiplicando R(s) por G(s)

$$(s^3+9s^2+26s+24)\,G(s) = 24$$

Aplicando a transformada Inversa de laplace

$$\dddot{g}(t) + 9\ddot{g}(t) + 26\dot{g}(t) + 24\,g(t) = 24\,c(t)$$

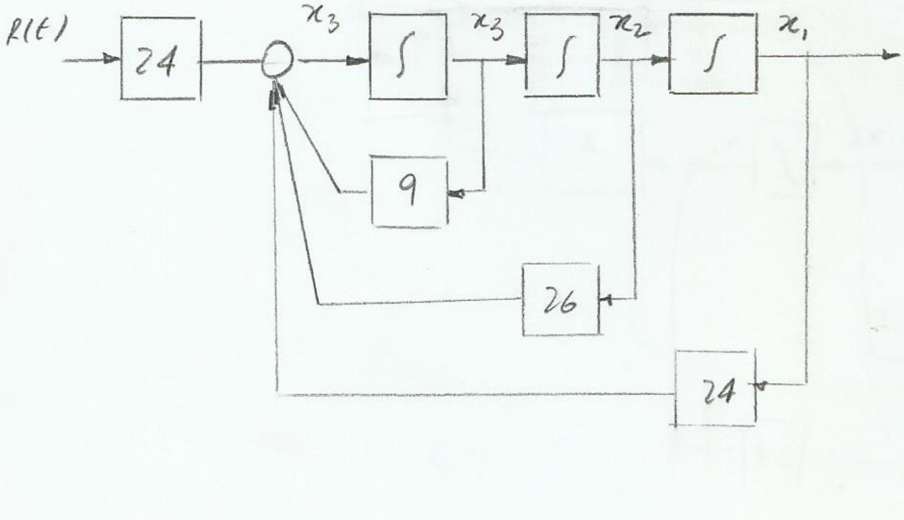
$x_1 = g(t) \qquad \dot{x}_1 = \dot{g}(t) = x_2$

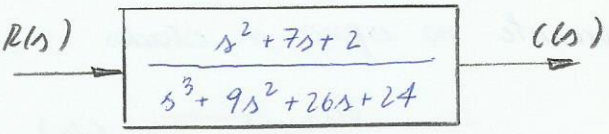
$x_2 = \dot{g}(t) \qquad \dot{x}_2 = \ddot{g}(t) = x_3$

$x_3 = \ddot{g}(t) \qquad \dot{x}_3 = \dddot{g}(t) = 24\,c(t) - 9x_3 - 26x_2 - 24x_1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} c(t)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$





$$\sim \frac{1}{s^3+9s^2+26s+24} \cdot s^2+7s+2$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2+7s+2}{s^3+9s^2+26s+24} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

Logo, $C(s) = (s^2+7s+2)\,X(s)$

$R(s) = (s^3+9s^2+26s+24)\,X(s)$

Aplicando a transformada Inversa de Laplace

$$c(t) = \ddot{x}(t) + 7\dot{x}(t) + 2x(t)$$
$$r(t) = \dddot{x}(t) + 9\ddot{x}(t) + 26\dot{x}(t) + 24x(t)$$

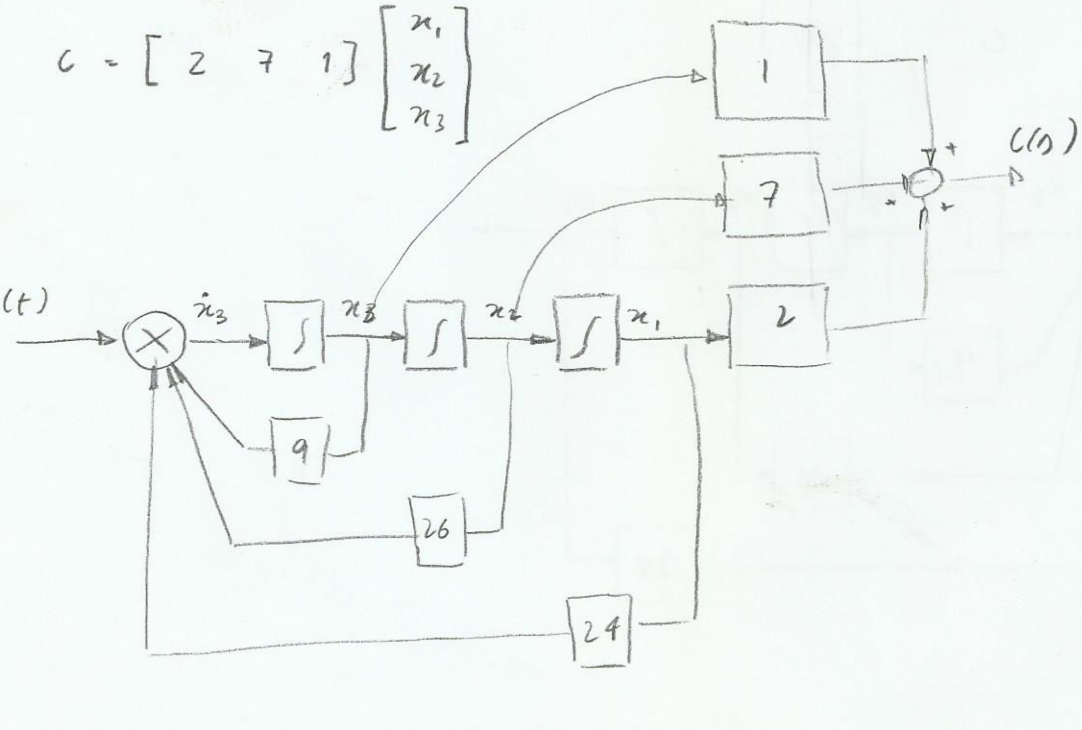
$x_1 = x(t)$ $\quad \dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2$

$x_2 = \dot{x}(t)$ $\quad \dot{x}_2 = \ddot{x}(t) = x_3$

$x_3 = \ddot{x}(t)$ $\quad \dot{x}_3 = \dddot{x}(t) = r(t) - 9x_3 - 26x_2 - 24x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



16-03-2016

Equação de Estado e de Saída no domínio "s"

Transformada de Laplace de um vetor

Seja:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix}$$

Transformada de Laplace da derivada de um vetor

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ sX_2(s) - x_2(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \\ \vdots \\ sX_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boxed{\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) + x(0)}$$

Equação de Estado e Saída

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} sX(s) + x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Det: a) Equação de Estado e de saída no domínio da frequência complexa s

b) O diagrama de blocos escalar

c) O diagrama de blocos vetorial

(a) Vetorial

$$sX(s) - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \qquad X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \quad ; \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}$$

Escalares

$$s X_1(s) - 2 = 0 X_1(s) + 1 X_2(s) + 0 U(s)$$

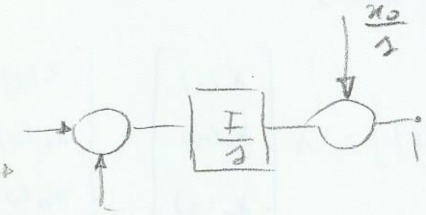
$$s X_2(s) + 1 = -10 X_1(s) - 7 X_2(s) + 1 U(s)$$

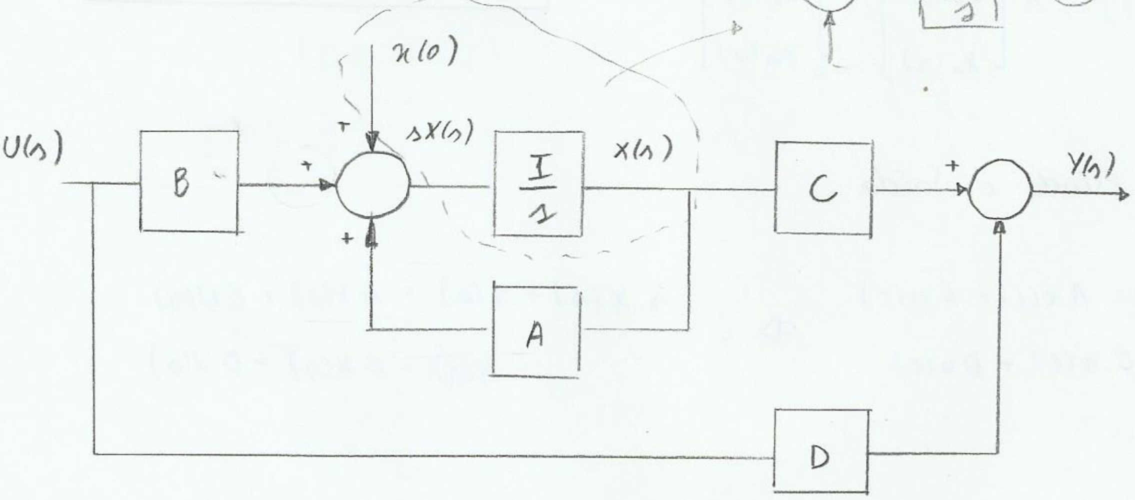
$$Y_1(s) = 1 X_1(s) + 1 X_2(s) + 0 U(s)$$

$$Y_2(s) = 0 X_1(s) - X_2(s) + 1 U(s)$$

(c) Diagrama de Blocos Vetorial

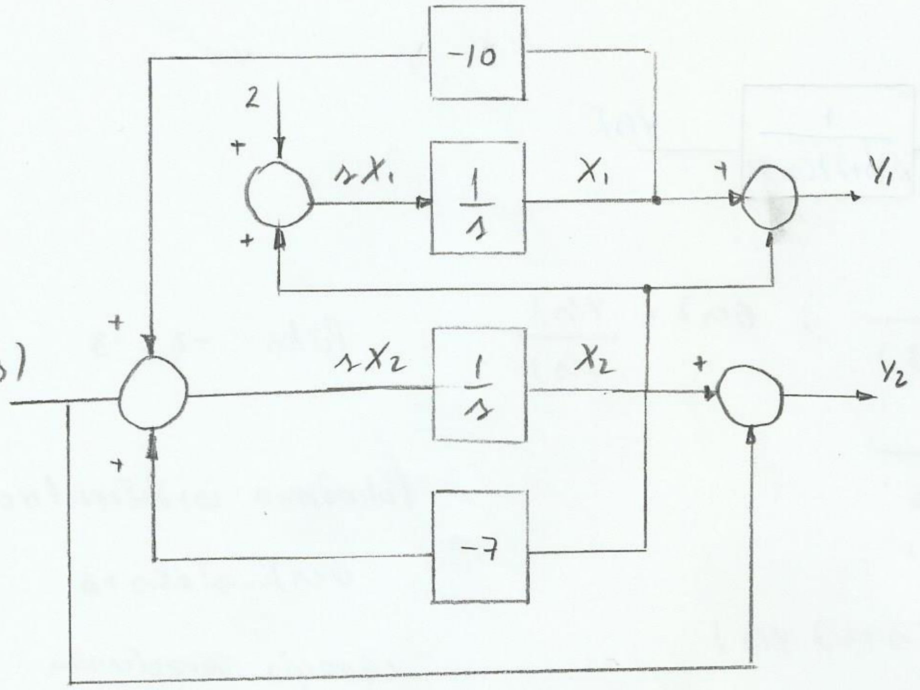
$$s X(s) = A X(s) + B U(s) + x(0)$$





$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_n \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ n \times n & n \times 1 & n \times 1 \end{array}$$

b) Diagrama de Blocos Escalar



Matriz Transição de Estado $\phi(s)$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \quad sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \; *$$

$$y = Cx + Du \qquad\qquad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$* \; s\,I\,X(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$s\,I\,X(s) - A\,X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\underbrace{(sI - A)}_{\phi(s)} X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$(sI-A)^{-1}(sI-A)X(s) = (sI-A)^{-1}(x(0) + BU(s))$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$$

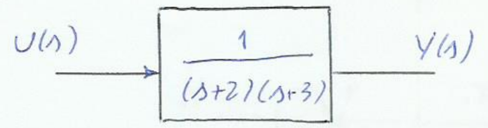
Inverso de M

$M^{-1}M = I$

$M^{-1} = \frac{1}{det(M)}[cofat]^{T}$

Portanto, $\boxed{X(s) = \phi(s)[x(0) + BU(s)] \; ; \; \phi(s) = (sI-A)}$

Ilustração



$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \quad ; \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Pólos: -2, -3

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

Polinômio característico $= \phi(s)$

$\phi(s) = s^2+5s+6$

equação característica: $\phi(s)=0 \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$

$$U(s) = (s^2+5s+6)\,Y(s)$$

$$u(t) = \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t)$$

$x_1 = y \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 - u$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det = s(s+5)+6 = s^2+5s+6$$

Algebra linear

Autovalores associado a uma matriz M

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

Fatos:

- Autovalores de A são os pólos do sistema
- Polinomio característico do sistema é dado pelo $\det(sI - A)$

data . .

S T Q Q S S D

Resposta no domínio da frequência complexa s

Sejo um sistema descrito no E.E.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$
$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

Apliando Laplace:

$$(1) \quad sX(s) - x(0) = A x(s) + BU(s)$$
$$(2) \quad Y(s) = C X(s) + DU(s)$$

$$(1) \quad (sI - A) X(s) = x(0) + BU(s)$$
$$X(s) = \phi(s) x(0) + \phi(s) B U(s)$$

em que $\phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$$(2) \quad Y(s) = C(\phi(s) x(0) + \phi(s) BU(s)) + DU(s)$$

Todo inf. dinamica depend do sistema

$$Y(s) = \underbrace{C \phi(s) x(0)}_{\text{Resposta para entrada livre}} + \underbrace{(C\phi(s)B + D) U(s)}_{\text{resposta a condição inicial nula (Forçado)}}$$

Definição

$G(s)$ é a matriz de transferência do sistema e relaciona o vetor de entrada com o de saída, supondo condições iniciais nulas (mesmo que não sejam nulas)

$$G(s) = C \phi(s) B + D$$

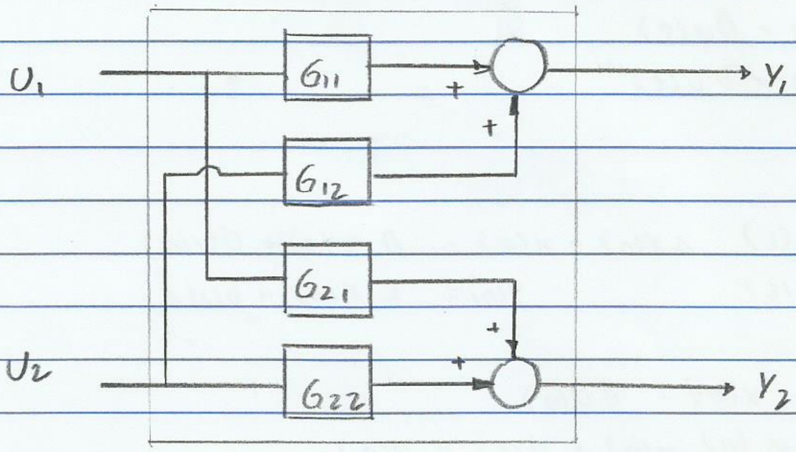
tal que

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

Jandaia

Exemplo 2x2

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$



<u>Exercício Prova:</u> Dado o sistema descrito no E.E.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 \quad 0]\, x + [0 \quad 0]\, u$$

Determine:

(a) $x(t)$ para $x(0) = [3 \ -1]^T$ e $u(t) = [0 \ 0]^T$

(b) $x(t)$ e $y(t)$ para $x(0) = 0$ e $u(t) = [0 \ 1]^T$

(c) A matriz de transferência $G(s)$

Formulário:

$$X(s) = \phi(s)\, x(0) + \phi(s)\, B\, U(s)$$

$$Y(s) = C\, \phi(s)\, x(0) + (C\, \phi(s)\, B + D)\, U(s)$$

<u>Procedimento</u>

$(sI - A)$

ϕ

$\phi\, x(0)$

$c\, \phi$

$\rightarrow C \phi B + D$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

data

Solução:

$$(sI-A)=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\phi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$c\phi(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\underbrace{[1\ 0]}_{1\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

$\Delta = s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$

$\Delta=0 \begin{cases} s_1=-1 \\ s_2=-2 \end{cases}$ Autovalores do sistema ou pólos do sist.

$$c\phi(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}[s\ \ -1]$$

(a) $x(t)$ para $x(0)=[3\ \ -1]^T$ e $u(t)=[0\ \ 0]^T$

$$X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}}_{2\times 2}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}}_{2\times 1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 3s+1 \\ 3-s \end{bmatrix}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{3s+1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{3-s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$$

$$X_1(s)=\frac{3s+1}{(s+1)(s+2)}=\frac{-2}{(s+1)}+\frac{5}{(s+2)} \quad \therefore x_1(t)=-2e^{-t}+5e^{-2t},\ t\geq 0$$

$$X_2(s)=\frac{3-s}{(s+1)(s+2)}=\frac{4}{(s+1)}-\frac{5}{(s+2)} \quad \therefore x_2(t)=4e^{-t}-5e^{-2t},\ t\geq 0$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} -2e^{-t}+5e^{-2t} \\ 4e^{-t}-5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

data • •

S T Q Q S S D

(b) $x(t)$ e $y(t)$ para $x(0)=0$ e $y(t) = [0 \ 1]^T$

$$X(s) = \phi(s)\,BU(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix}$$

$2\times 2 \quad 2\times 2 \quad 2\times 1$

$$X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} -1 & s \\ s+3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix} \quad \therefore X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/s \end{bmatrix}$$

$$\therefore X(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{2}{s^3+3s^2+2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r_1}{(s+1)} + \dfrac{r_2}{(s+2)} \\ \dfrac{r_3}{s} + \dfrac{r_4}{(s+1)} + \dfrac{r_5}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore x(t) = \begin{bmatrix} r_1 e^{-t} + r_2 e^{-2t} \\ r_3 + r_4 e^{-t} + r_5 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(c) $G(s) = C\phi B + \cancel{D}^{0}$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}[s \ \ -1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}[-1 \ \ s]$$

$$G(s) = \left[\underbrace{\frac{-1}{s^2+3s+2}}_{G_1} \quad \underbrace{\frac{s}{s^2+3s+2}}_{G_2}\right]$$

(b_2) $Y(s) = G(s)\,U(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}[s \ \ -1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1/s \end{bmatrix} \quad \therefore Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$Y(s) = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2} \qquad y(t) = r_1 e^{-t} + r_2 e^{-2t}$$

Exercícios Propostos - Capítulo 14

Exercício 1) e) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2\frac{du}{dt} + u(t)$

Aplicando a transformada de Laplace

$$s^3 Y(s) + 6s Y(s) + 5 Y(s) = 2s U(s) + U(s)$$

$$(s^3 + 6s + 5) Y(s) = (2s + 1) U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(2s+1)}{(s^3+6s+5)} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

Aplicando a transformada Inversa de Laplace

$$y = 2\dot{x} + x$$
$$u = \dddot{x} + 6\dot{x} + 5x$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3$

$x_3 = \ddot{x} \qquad \dot{x}_3 = \dddot{x} = u - 6x_2 - 5x_1$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Exercício 1) f) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y + \int_0^t y\,dt = \frac{du}{dt} + 5u(t)$

$$\left(s^2 + 2s + 1 + \frac{1}{s}\right) Y(s) = (s + 5) U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+5)}{(s^2+2s+1+\frac{1}{s})} \rightarrow \frac{(s^2+5s)\,X(s)}{(s^3+2s^2+s+1)\,X(s)} \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y = \ddot{x} + 5\dot{x}$$

$$u = \dddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + x$$

$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3$

$x_3 = \ddot{x} \qquad \dot{x}_3 = \dddot{x} = u - 2x_3 - x_2 - x$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Exercício 1) g) $\dddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1(t)$

$\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 2y_1 = u_2(t)$

Sistema 5ª Ordem → 5 variaveis de estado

$\dot{x} = Ax + Bu$

$(5\times1) = (5\times5)(5\times1) + (5\times2)(2\times1)$

$y = Cx + D$

$(2\times1) = (2\times5)5\times1) + 0$

$x_1 = y_1 \quad \dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{y}_1 \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}_1 = x_3$

$x_3 = \ddot{y}_1 \quad \dot{x}_3 = \dddot{y}_1 = u_1 - 3x_2 - 2x_1 + 2x_4$

$x_4 = y_2 \quad \dot{x}_4 = \dot{y}_2 = x_5$

$x_5 = \dot{y}_2 \quad \dot{x}_5 = \ddot{y}_2 = u_2 - 2x_5 - 2x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\-2&-3&0&2&0\\0&0&0&0&1\\-2&0&0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

Exercício 2) Converta ao modelo de estados as f.t.

(a) $G(s) = \dfrac{100}{s^3+5s^2+15s+10} = \dfrac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow (s^3+5s^2+15s+10)\,Y(s) = 100\,U(s)$

Transformada Inversa de Laplace ⇒ $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 15\dot{y} + 10y = 100u$

$x_1 = y \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$x_2 = \dot{y} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$

$x_3 = \ddot{y} \quad \dot{x}_3 = \dddot{y} = 100u - 5x_3 - 15x_2 - 10x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-10&-15&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

Exercício 2) (b) $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+3)(s+5)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{10}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow$ $y = 10x$ 3ª Ordem ; Portanto 3 estados

$u = \dddot{x} + 9\ddot{x} + 23\dot{x} + 15x$

$x_1 = x \qquad \dot{x}_2 = \dot{x} = x_2$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3$

$x_3 = \ddot{x} \qquad \dot{x}_3 = \dddot{x} = u - 9x_3 - 23x_2 - 15x_1$

$$\underset{3\times1}{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}} = \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} + \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} u \qquad \underset{1\times1}{y} = \underset{1\times3}{\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

Exercício 2) c) $G(s) = \dfrac{250}{s(s+2)(s+5)}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{250}{s(s+2)(s+5)} = \frac{250}{s^3 + 7s^2 + 10s} \frac{X(s)}{X(s)}$$

$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow$ $y = 250x$ 3ª Ordem $\rightarrow$ 3 estados

$u = \dddot{x} + 7\ddot{x} + 10x$ 1 saída

$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = x_3$

$x_3 = \ddot{x} \qquad \dot{x}_3 = u - 7x_3 - 10x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e) $G(s) = \dfrac{(s+2)}{(s^3+3s^2+5s+8)}$

3ª Ordem 3 estados

1 saída

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^3+3s^2+5s+8}\,\frac{X(s)}{X(s)}$$

$$y = \dot{x} + 2x$$
$$u = \dddot{x} + 3\ddot{x} + 5\dot{x} + 8x$$

$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = x_3$

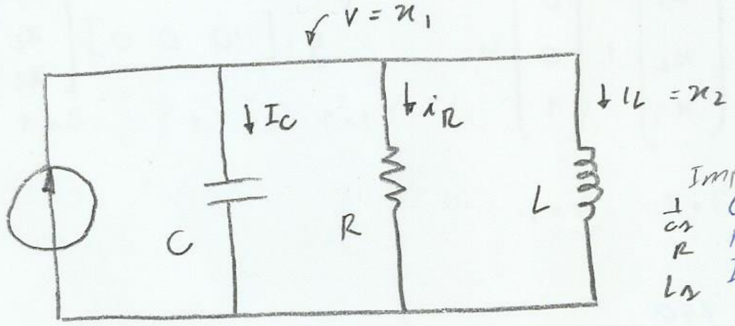
$x_3 = \ddot{x} \qquad \dot{x}_3 = u - 3x_3 - 5x_2 - 8x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Exercício 3)

Saída: y

$J = J(t)$



Lembrete

Impedância		Tensão	Corrente
$\frac{1}{Cs}$	Capacitor	$\frac{1}{C}\int i(t)dt$	$C\frac{dv(t)}{dt}$
R	Resistor	$R\,i(t)$	$\frac{v(t)}{R}$
Ls	Indutor	$L\frac{di(t)}{dt}$	$\frac{1}{L}\int_0^T v(t)dt$

Lei de Kirchhoff

$$J(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt$$

$$J(s) = CsV + \frac{V}{R} + \frac{V}{Ls}$$
$$RLs\,J(s) = RLCs^2V + LsV + RV$$
$$RLs\,J(s) = (RLCs^2 + Ls + R)V$$
$$RL\,\dot{J} = RLC\ddot{v} + L\dot{v} + Rv$$

$$y = \frac{1}{C}\int_0^T i_L\,dt = R\,i_R = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$J = C\dot{v} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt \xrightarrow{\mathcal{L}} J(s) = Cs\,V(s) + \frac{1}{R}V(s) + \frac{1}{sL}V(s)$$

$$J(s) = \left(\frac{RLCs^2 + sL + R}{sRL}\right)V(s) \qquad \frac{V(s)}{J(s)} = \frac{sRL}{(RLCs^2+sL+R)}\,\frac{X(s)}{X(s)}$$

$\mathcal{L}^{-1} \to \quad v = RL\dot{x}$

$J = RLC\ddot{x} + L\dot{x} + Rx$

$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = \dfrac{J - Lx_2 - Rx_1}{RLC}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RLC} \end{bmatrix} J$$

Lei de Kirchoff

$$J(t) = \frac{C\,dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + I_l$$

$$J = C\dot{v} + \frac{v}{R} + i_l \rightarrow R\,J = RC\dot{v} + v + R\,i_l$$

$x_1 = v$ $\quad \dot{x}_1 = \dfrac{R\,J - x_1 - R\,x_2}{RC}$

$x_2 = i_L$

$\dot{x}_2 = i_L = \dfrac{v}{L} = \dfrac{x_1}{L}$

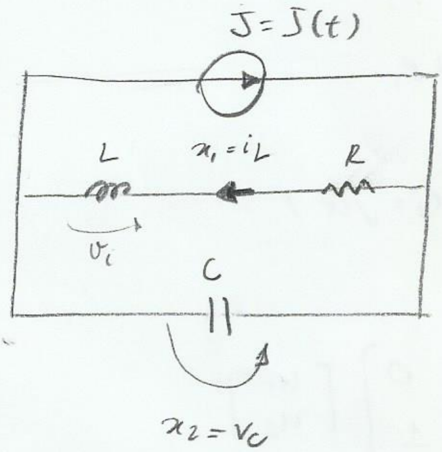
Indutor

$v_L = \dfrac{L\,di(t)}{dt} \therefore v = L\,\dot{i}_L$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} J(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exercício B)



	Tensão	Corrente	Imp
Capacitor	$\frac{1}{C}\int_0^T i\,d(t)$	$\frac{C\,dv(t)}{dt}$	$\frac{1}{Cs}$
Resistor	$R\,i(t)$	$\frac{v(t)}{R}$	R
Indutor	$\frac{L\,di(t)}{dt}$	$\frac{1}{L}\int_0^T v(t)\,dt$	Ls

$J(t) = i_L + i_C$

$J(t) = i_L + C\dot{v}$

$x_1 = i_L$

$x_2 = v_C$

$\dot{x}_2 = \dfrac{J(t) - x_1}{C}$

$i_C = \dfrac{C\,dv(t)}{dt} = C\dot{v}$

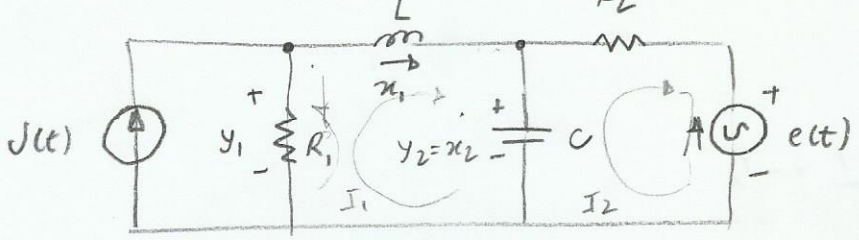
$v_C = L\,\dot{i}_L + R\,i_L$

$\dot{x}_1 = \dfrac{x_2 - R\,x_1}{L} = \dot{i}_L$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} J(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ L\dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(c)



	Tensão	Corrente	Im
Capacitor	$\frac{1}{C}\int i\,d(t)$	$C\frac{dv(t)}{dt}$	$\frac{1}{Cs}$
Resistor	$Ri(t)$	$\frac{v(t)}{R}$	R
Indutor	$L\frac{di(t)}{dt}$	$\frac{1}{L}\int_0^t v(t)$	Ls

Entradas: $u_1 = J(t)$ Saídas: $y_1 = V_{R1}$

$u_2 = e(t)$ $y_2 = V_C$

$\dot{x} = A x + B u$ (Estado, Entrada)

$y = Cx + D$ (saída)

$$J(t) = x_1 + \frac{y_1}{R_1} \Rightarrow R_1 J(t) = R_1 x_1 + y_1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{R_1 J(t) - y_1}{R_1}$$

$$x_1 + \frac{e(t)}{R_2} = C\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{R_1 x_1 + e(t)}{CR_2} = \frac{R_1 x_1 + u_2}{CR_2}$$

$$y_1 - x_2 = L\dot{x}_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{y_1 - x_2}{L} \quad ; \quad y_1 = (\overset{u_1}{J(t)} - x_1) R_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{J(t)R_1 - x_1 R_1 - x_2}{L} \quad ; \quad u_1 = J(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{R_1}{CR_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2x1 2x2 2x1 2x2 2x1

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2x1 2x2 2x1

Equações de estado e de saída no domínio da frequência

Equação vetorial de estado: $sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$

Equação vetorial de saída: $Y(s) = CX(s) + DU(s)$

Matriz de transição de Estado

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$s[X(s) - AX(s)] = x_0 + BU(s)$$

$$(sI - A)\,X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$(sI - A)^{-1}(sI - A)X(s) = (sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s))$$

$$\therefore \quad X(s) = \underbrace{(sI - A^{-1})}_{\phi(s)}[x_0 + BU(s)]$$

(Polinômio Característico)

Exemplo 14.11

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Determine o polinômio característico e os autovalores da matriz

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} \qquad ; \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}[\text{Cof}]^T$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+2 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A) = s^2 + 2s + 6$ Autovalores

Exemplo 14.12)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

(a) Estado do sistema no instante t ; $x_1(0) = x_{01} = 2$
$x_2(0) = x_{02} = -1$

$$\phi = (sI - A)^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \therefore \phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

$X(s) = (sI - A)^{-1}[x_0 + BU(s)]$ e Vetor de Entrada nulo

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \therefore X(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} \\ -\frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

$$X_1(s) = \frac{2}{s+2} \therefore x_1(t) = 2e^{-2t}$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+5} \therefore x_2(t) = -1e^{-5t}$$

(b) Para cond. iniciais as mesmas e $u_1 = 3h(t)$ $\Rightarrow$ $U_1(s) = 3/s$
$u_2 = 2h(t)$ $U_2(s) = 2/s$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/s \\ 2/s \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{s} + 2 \\ \frac{5}{s} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3+2s}{s} \\ \frac{5-s}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3+2s}{s(s+2)} \\ \frac{5-s}{s(s+5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1{,}5}{s} + \frac{0{,}5}{s+2} \\ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 + 0{,}5e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 14.13

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \qquad Y(s) = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(a) Determine vetor de estado $x(t)$ para $\begin{matrix} x_{01} = 3 \\ x_{02} = -1 \end{matrix}$ e $U(t) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi B U(s) \quad ; \Phi = (sI-A)^{-1} \\ Y(s) = C\Phi(s)x(0) + [C\Phi(s)B + D]\,U(s) \end{cases}$$

Procedimento

$(sI-A)$

Φ

$\Phi . x(0)$

$C\Phi$

$C\Phi B + D$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}$$

$$\Phi = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s & -1\\ -2 & s+3\end{bmatrix}$$

Com $U(t) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\quad X(s) = \Phi(s)x(0) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}_{\Delta}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$

$$X(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{3s+1}{(s+1)(s+2)}\\[2mm] \dfrac{-s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{-2}{(s+1)} + \dfrac{5}{(s+2)}\\[2mm] \dfrac{4}{(s+1)} + \dfrac{-5}{(s+2)}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}-2e^{-t} + 5e^{-2t}\\[2mm] 4e^{-t} - 5e^{-2t}\end{bmatrix} \quad p/\, t \geq 0$$

(b) Determine o vetor de estado $x(t)$ para o caso que $x_0 = 0$ $\quad u_1(t) = 0$ $\quad u_2 = h(t) =$ degrau

$$(sI-A) = \begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix} \qquad \Phi = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

$\Phi x(0) = 0 \qquad X(s) = \Phi B U(s)$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1/s\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}-1 & s\\ s+3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1/s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\[2mm] \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}\\[2mm] \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0 \\ x_2 = 1 - 2e^{-t} + e^{2t} \end{matrix}$$

(c) Sendo $y(t) = x_1(t)$ determine $G(s)$

$(sI - A)$

$\phi = (sI-A)^{-1}$

$$G(s) = [C\phi(s)B + D]$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \end{bmatrix}}_{2\times1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times2}$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{-1}{(s+1)(s+2)}}_{G_1} \quad \underbrace{\frac{s}{(s+1)(s+2)}}_{G_2} \Big]$$

Exercícios Propostos

Exercício 1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

(a) Equações Escalares de Estado no domínio da frequência

$sX - x_0 = AX + bU$ $\qquad$ $sX_1(s) - x_{01} = -X_1 + X_2 + U_2(s)$

$y = Cx + DU$ $\qquad$ $sX_2(s) - x_{02} = -2X_2 + U_1(s)$

(b) Para C.I = 0 determine $x_1(t)$ e $x_2(t)$

$sIX - AX = x_0 + bU$ $\qquad$ $(sI-A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$

$(sI-A)X = x_0 + bU$

$X = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}bU$ $\qquad$ $\phi = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$

$$X = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = 0{,}5 - e^{-t} + 0{,}5\,e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 0{,}5 - 0{,}5\,e^{-2t}$$

Realimentação de Estados

Lembrete: $\dot{x} = f(x,u)$ Equação de estado

$y = g(x,u)$ Equação de saída

Para sistemas lineares: $\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}}$

Transformação linear das variáveis de estado

Um vetor de estado de um sistema: $x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Pode ser descrito por uma combinação linear

$$x' = x'(t) = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} x_1' &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n \\ x_2' &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \cdots + q_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \cdots + q_{nn}x_n \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Logo, $P = Q^{-1}$

$x = Px'$ ou $x' = Qx$

Transformação das equações de estado e de saída

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Deseja-se escrever essas equações em função de novas variáveis x'!

$$\begin{cases} P\dot{x}' = APx' + Bu \\ y = CPx' + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\dot{x}' = APx' + Bu \\ y = CPx' + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}' = P^{-1}APx' + P^{-1}Bu \\ y = CPx' + Du \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}' = A'x' + B'u \\ y = C'x' + D'u \end{array}$$

Logo: $A' = P^{-1}AP$

$B' = P^{-1}B$

$C' = CP$

$D' = D$

(Podemos verificar se $AP = PA'$)

Os autovalores de A' são os mesmos de A.

logo, $[\lambda I - A] = P(\lambda I - A')P^{-1}$

$\det(\lambda I - A) = \det(P)\det(\lambda I - A')\det(P^{-1})$

Exemplo 15.1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad e \quad D = 0$$

Relação para a transformação de variáveis de estado: $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$

$P = Q^{-1}$

$x = Px'$ ou $x' = Qx$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

logo, $Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & -11 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B' = P'B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C' = CP = [1 \ 0]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = [1 \ -2]$$

Verificação: $AP = PA'$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s+7 \end{bmatrix} = s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4)$$

$$\det(sI - A') = \det\begin{bmatrix} s+13 & -15 \\ 6 & s-6 \end{bmatrix} = s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4)$$

Mesmo autovalores

Exemplo 15.2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Deseja-se representar esse sistema por

$$x = P x'$$
$$x' = Q x$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$A' = P^{-1} A P \qquad C' = CP$$
$$B' = P' B \qquad D' = D$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-2-1}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 5s + 4$$

$$\det(sI - A') = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix} = s^2 + 5s + 4$$

Mesmo autovalores A' e A

$$B' = P'B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

Há dois tipos importantes de transformações de variáveis de estado, a saber:

(a) a transformação que diagonaliza a matriz A do sistema (ou seja, que transforma A em uma matriz A', em que todos os elementos fora da diagonal são nulos).

(b) a transformação que resulta em uma matriz de uma das denominadas formas canônicas, que serão vistas diante.

Matriz diagonalizada (A matriz diagonalizada de um sistema tem como elementos da diagonal principal os autovalores da matriz A do sistema dado:

$$A_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \qquad \det([sI - A_d]) = (s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)$$

Exemplo 15.3

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -134 & 39 \\ 0 & -38 & 8 \\ 0 & -153 & 32 \end{bmatrix}$$

Determinar a matriz diagonalizada que se obtém a partir das matrizes A_1 e A_2

$$\det([sI - A_1]) = \det\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 8 & 14 & s+7 \end{bmatrix} = (s^2+7s+14)s + 8 = s^3+7s^2+14s+8$$

$$\det([sI - A_2]) = \det\begin{bmatrix} s+1 & 134 & -39 \\ 0 & s+38 & -8 \\ 0 & 153 & s-32 \end{bmatrix} = s^3+7s^2+14s+8$$

logo os autovalores de A_1 e A_2 são $-1, -2$, e -4

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Diagonalização da matriz do sistema - autovalores

$$[A - s_i I] p_i = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$x = Px'$
$x' = Qx$; $P = Q^{-1}$

$\boxed{\text{Exemplo 15.4}}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [2 \ \ -1]$ $D = 0$

Determine os autovalores e autovetores ; matriz Ad.

pólos do sistema — polinomio característico

Autovetores de A: $\det[sI - A] = \det\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} = (s+1)(s+4) + 2 = s^2 + 5s + 6$

$s^2 + 5s + 6 = 0$

$s = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 6}}{2} < \begin{matrix} s_1 = -2 \\ s_2 = -3 \end{matrix}$

Autovalores

$\underbrace{s^2 + 5s + 6}_{\text{Autovetores}} = (s+2)(s+3)$

logo: $A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (Matriz Diagonalizada)

Lembrete: $[A - s_i I] p_i = 0$

Para $s_i = -2$, temos $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = 0$ $\quad \begin{matrix} p_{11} - 2p_{21} = 0 \\ p_{11} - 2p_{21} = 0 \end{matrix}$; $\therefore p_{11} = 2p_{12}$

Para $p_{21} = 1$ temos $p_{11} = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $s_i = -3$, temos $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = 0$ $\quad 2p_{12} - 2p_{22} = 0$

$\therefore p_{12} = p_{12}$; Para $p_{12} = 1$, temos $p_{22} = 1$

Logo, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Lembrete: $\boxed{\begin{matrix} A' = P^{-1}AP & C' = CP \\ B' = P^{-1}B & D' = D \end{matrix}}$

Verificação do cálculo: $PA' = AP \Rightarrow PA_d = AP$

$PA_d = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$AP = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

} Portanto, os cálculos estão corretos

Para $A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Temos: $Q = P^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

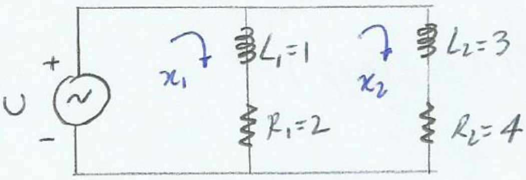
$B = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = CP = [2 \quad -1]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 1]$

Logo

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}' &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [3 \quad 1]\, x \end{aligned}}$$

Exemplo 15.5



- Equações de Estado (correntes como variável de estado)
- Autovalores e Autovetores de A
- Matriz P de $A \to A_d$
- Novas equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 2x_1 - \dot{x}_2 - 2x_2 = u(t) \\ 3\dot{x}_2 + 4x_2 + \dot{x}_2 + 2x_2 - \dot{x}_1 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = u(t) & (I) \\ -2x_1 + 6x_2 - \dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 = 0 & (II) \end{cases}$$

Lembrete:

	Tensão	Corrente
Capacitor	$\frac{1}{C}\int i\,dt$	$C\frac{dv}{dt}$
Resistor	$R \cdot i$	$\frac{v}{R}$
Indutor	$L\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{L}\int v\,dt$

Objetivo: Encontrar $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$

Somando (I) e (II), temos

$$3\dot{x}_2 + 4x_2 = u(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{u(t)}{3} - \frac{4}{3}x_2$$

Somando 4(I) e II, temos

$$6x_1 - 2x_2 + 3\dot{x}_1 = 4u(t) \quad \therefore \quad \dot{x}_1 = \frac{4}{3}u(t) - \frac{6x_1}{3} + \frac{2x_2}{3}$$

Portanto, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2/3 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} u(t)$$

Autovetores:

$$\det[sI - A] = \det\begin{bmatrix} s+2 & -2/3 \\ 0 & s+4/3 \end{bmatrix} = (s+2)(s+4/3)$$ (Polinomio caracteristico)

Autovalores: -2 e $-\frac{4}{3}$

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

Lembrete: $[A - s_i I]\, p_i = 0$

→ Para $s = -2$, temos $\begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = 0$ $\quad \begin{matrix} 0p_{11} - \frac{2}{3} p_{21} = 0 \\ 0p_{11} + \frac{2}{3} p_{21} = 0 \end{matrix}$

Para $p_{11} = 1$ temos $p_{21} = 0$

→ Para $s = -\frac{4}{3}$, temos $\begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = 0$ $\quad -\frac{2}{3} p_{21} + \frac{2}{3} p_{22} = 0$; $p_{22} = p_{12}$

Para $p_{12} = 1$ temos $p_{22} = 1$

Portanto: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lembrete:

$A' = P^{-1}AP \qquad C' = CP$

$B' = P^{-1}B \qquad D' = D$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B' = P^{-1}B = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

$x' = P^{-1}x = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ Logo; $\begin{matrix} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_2 \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} u(t)$$

Portanto, $\begin{cases} \dot{x}_1' = -2x_1' + u(t) \\ \dot{x}_2' = -4/3\, x_2' + \dfrac{u(t)}{3} \end{cases}$

ou

$$\begin{cases} 2x_1' + \dot{x}_1' = u(t) \\ 4x_2' + 3\dot{x}_2' = u(t) \end{cases}$$

Exemplo 15.6

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix} \quad C=[1\ 1\ 1] \quad D=[0]$$

PULAR

— 11 —

Controlabilidade e observabilidade

$\underbrace{\hspace{6cm}}$

Esta ligado a projeto de sistemas multivariáveis

A realimentação de estados pode realocar os pólos do sistema para as características desejadas. Para realizar esta tarefa, devemos verificar se o sistema é controlável.

A controlabilidade do sistema apenas depende das matrizes A e B.

Matriz de controlabilidade: $\boxed{M_c = [B \quad AB \quad A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]}$

- Caso o $\det(M_c) \neq 0$ o sistema é controlável
- Outra alternativa é diagonalizar a matriz do sistema e achar B'. Se uma das suas linhas for nula, o sistema não é completamente controlável.

Exemplo: 15.7

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$ - Controlável?

$$M_c = [B \quad AB]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

logo $M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(M_c) = 2-2 = 0$ (Não Controlável)

Exemplo 15.8

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Controlável?

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$AB = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

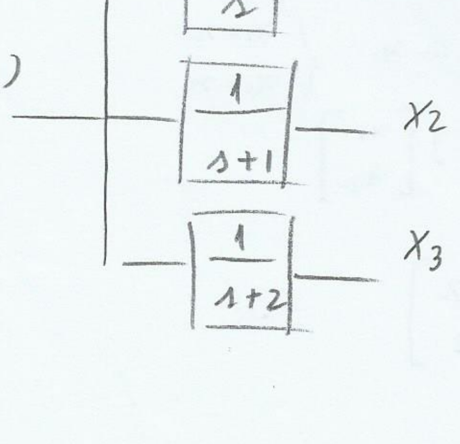
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

logo $M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(M_c) = -2 \neq 0$ (Sistema Controlável)

(b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u(t) \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} sX_1 = U(s) \\ sX_2 = -X_2 + U(s) \\ sX_3 = -2X_3 + U(s) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = \dfrac{U(s)}{s} \\ X_2 = \dfrac{U(s)}{s+1} \\ X_3 = \dfrac{U(s)}{s+2} \end{array}$$



Propriedade das matrizes de controlabilidade

$$P = M_c\,(M_c')^{-1}$$

$\boxed{\text{Exemplo 15.9}}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad - M_c\,?$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow y$$

$$\det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix} = \underbrace{s^2 + 5s + 6}$$

Autovetore. (Polinomio caracteristico)

$$G = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{?}{s^2+5s+6}$$

Matriz de controlabidade: $M_c = [B \quad AB]$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_c' = [B' \quad A'B']$$

Para forma canônica, temos

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A'B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$M_c' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$P = M_c\,(M_c')^{-1}$$

$$(M_c')^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \therefore P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistema de 2ª Ordem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$U(s) = (s^2 + a_1 s + a_0)\,X(s)$$

$$u = \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x$$

$$x_1 = x \qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{x} \qquad \dot{x}_2 = u - a_1 x_2 - a_0 x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y(s) = (c_1 s + c_0)\,X(s)$$

$$y = c_1 \dot{x} + c_0 x \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Observabilidade

Podemos estimar uma variável de estado do sistema utilizando um observador de estado. Entretanto, devemos verificar se o sistema é observável ou não.

Matriz de observabilidade $\quad Mob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

- Verificar se $\det[Mob] \neq 0$ (Observável)
- Diagonalizar matriz A e achar C' caso não possua coluna nula o sistema é observável

Exemplo 15.10

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- É observável?

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

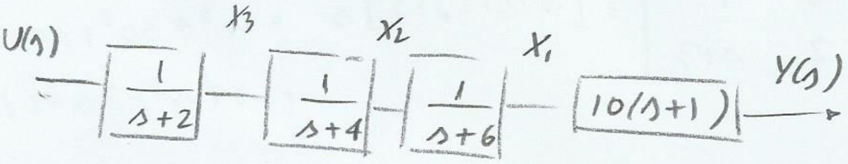
2ª Ordem, logo $Mob = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$

$$CA = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1]$$

Logo $Mob = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det[Mob] = 1 \neq 0$ Observável

Exemplo 15.11



$X_1 = \dfrac{X_2}{s+6} \Rightarrow (s+6)X_1 = X_2$

$\dot{x}_1 + 6x_1 = x_2$

$X_2 = \dfrac{X_3}{s+4} \Rightarrow (s+4)X_2 = X_3$

$\dot{x}_2 + 4x_2 = x_3$

$X_3 = \dfrac{U(s)}{s+2} \Rightarrow (s+2)X_3 = U(s)$

$\dot{x}_3 + 2x_3 = u$

$Y(s) = 10(s+1)X_1 \Rightarrow y = 10\dot{x}_1 + 10x_1$

$y = 10(x_2 - 6x_1) + 10x_1$

$= 10x_2 - 50x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-50 \quad 10] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$Mob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$

$$CA = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -50 & 10 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 300 & -90 & 10 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 300 & -90 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1800 & 660 & -110 \end{bmatrix}$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} -50 & 10 & 0 \\ 300 & -90 & 10 \\ -1800 & 660 & -110 \end{bmatrix} = -165\,000 + 150\,000 = -15\,000 \neq 0 \quad (\text{Observável})$$

Exemplo 15.12

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Para A_d é Observável?

$$\det[sI - A] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s+3 \end{vmatrix} = [s(s+3)+2]s = s^3 + 3s^2 + 2s = s(s^2+3s+2)$$

$s^2 + 3s + 2 = 0$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

$s^3 + 3s^2 + 2s = s(s+1)(s+2)$

$s_1 = 0 \quad s_2 = -1 \quad s_3 = -2$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$A \rightarrow A_d \rightarrow P$? $\quad [A - s_i I]P_i = 0$

Para $s = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = 0$$

$P_{21} = 0$

$P_{31} = 0$

$-2P_{21} - 3P_{31} = 0$

$P_{11} = 1$

Para $s = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \end{bmatrix} = 0$$

$P_{21} + P_{22} = 0$

$P_{22} + P_{23} = 0$

$-2P_{22} - 2P_{23} = 0$

$P_{22} = -P_{23} = -P_{21}$

Para $P_{22} = -1$; $P_{23} = P_{21} = 1$

Para $s = -2$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{bmatrix} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2P_{31} + P_{32} = 0 \\ 2P_{32} + P_{33} = 0 \\ -2P_{32} - P_{33} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_{32} = -2P_{31} \\ P_{32} = -\dfrac{P_{33}}{2} \end{array}$$

Para $P_{31} = 1$ temos $P_{32} = -2$ $P_{33} = 4$

Logo, temos $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Matriz de Observabilidade

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$C' = CP = [1 \ -0{,}5 \ -0{,}5] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \therefore C' = [1 \ 1 \ 0]$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $C'A = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 1]$

$C'A^2 = [0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} = [0 \ -2 \ -2]$ $M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

$\det(M_{ob}) = 0$ (Não observável)

Também podemos notar que temos uma coluna nula em C que significa que o sistema não é observável.

Realimentação de Estados

Os controladores em série com a planta podem ser construído pelos métodos
(controlador dinamico) (lugar das raízes ou frequência)

O controlador para projetos baseados no modelo de estado não realimentam estaticamente a saída, mas realimentam estaticamente as variáveis de estado do sistema.

(É utilizado o projeto por alocação ou distribuição de polos)

Roteiro básico:

- Dado (A,B,C) e conhecidos $(p_1, p_2, \dots p_n)$ obter polinômio característico de malha fechada $\Delta_f(s)$

(1) $\Delta_f(s) = (s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)$

(2) $\Delta_\phi(s) = \det[sI-(A-BK)]$

$= \det[sI-(A-B[k_1\ k_2 \cdots k_n])$.

(3) Compara-se $\Delta_f(s) = \Delta_\phi(s)$

Exemplo 15.14

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [\,1 \quad 0\,] \quad D = [0]$$

Determine k para pólos em $-2 \pm j2\sqrt{2}$ (M.F)

$$\det[sI-A] = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s(s+3)+2 = s^2+3s+2 \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

Logo: $s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$ (Polinômio característico em malha aberta)

Polinômio característico em malha fechada:

$$\left(\begin{aligned} &= (s-a)(s+a) \\ &= s^2 - a^2 \end{aligned}\right)$$

$= (s+2-j2\sqrt{2})(s+2+j2\sqrt{2})$

$= (s+2)^2 - (j2\sqrt{2})^2$

$= s^2+4s+4+4\times 2$

$= s^2+4s+12$

$\Delta_f = \det[sI-(A-BK)]$

$$BK = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{1\times 2}{[K_1\ K_2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_f = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-K_1 & -3-K_2 \end{bmatrix} \right|$$

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2+K_1 & s+3+K_2 \end{vmatrix} = s(s+3+K_2)+2+K_1$$

$= s^2+3s+sK_2+2+K_1$

$= s^2+(3+K_2)s+(2+K_1)$

$3+K_2 = 4 \therefore K_2 = 1$

$2+K_1 = 12 \therefore K_1 = 10$

Logo $K = [10 \quad 1]$

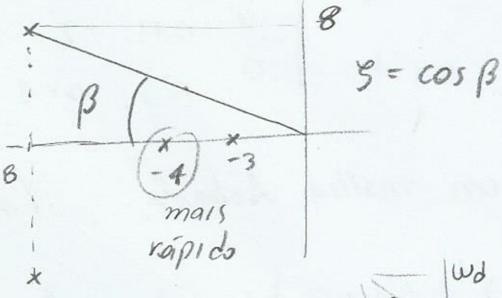
Exemplo 15.15

Projete um controlador que fique 2 vezes mais rápido e $\zeta = 0{,}707$

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pólos do sistema: $\det[sI - A] = \begin{vmatrix} s+13 & -15 \\ 6 & s-6 \end{vmatrix} = s^2 + 7s + 12 \begin{cases} s = -3 \\ s = -4 \end{cases}$

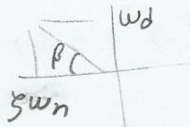
Logo: $s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4)$ (MA)



Para $\zeta = 0{,}707 \rightarrow \beta = 45^\circ$

logo, $\omega_d = 8$ rad/s

Portanto: novos pólos em $-8 \pm j8$



$$\Delta_f = (s + 8 + j8)(s + 8 - j8) = (s+8)^2 + 8^2 = s^2 + 16s + 128$$

$$\Delta_f = \det[sI - (\underset{2\times 2}{A} - \underset{2\times 1}{B}\underset{1\times 2}{K})]$$

$$= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right\} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2K_1 & 2K_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right\} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s + 13 + 2K_1 & -15 + 2K_2 \\ 6 + K_1 & s - 6 + K_2 \end{vmatrix} = s^2 + (K_2 + 2K_1 + 7)s\ (K_2 + 3K_1 + 12)$$

$$\begin{cases} 2K_1 + K_2 + 7 = 16 \\ 3K_1 + K_2 + 12 = 128 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2K_1 + K_2 = 9 \\ 3K_1 + K_2 = 116 \end{cases}$$

$$K_1 = 107 \quad e \quad K_2 = -205$$

Logo $K = [107 \quad -205]$

Exemplo 15.16

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Pólos em: $-1, -2, -5$

Projeto um controlador (K)

$$y = [1\ 0\ 0]\, x$$

$$\det[sI - A] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -2 \\ 0 & 0 & s+4 \end{vmatrix} = (s+1)(s+4)s \begin{cases} s=0 \\ s=-1 \\ s=-4 \end{cases} \quad (m.a)$$

Pólos em malha fechada: $(s+1)(s+2)(s+5) =$

$$= (s^2+3s+2)(s+5) = s^3 + 3s^2 + 2s + 5s^2 + 15s + 10 = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$$

$$\Delta\phi_f = \det[sI - (A - BK)] \begin{cases} A: 3\times 3 \\ B: 3\times 1 \\ K = 1\times 3 \end{cases}$$

$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [K_1\ K_2\ K_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2K_1 & 2K_2 & 2K_3 \end{bmatrix} \qquad A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2K_1 & -2K_2 & -4-2K_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta\phi_f = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -2 \\ 2K_1 & 2K_2 & s+4+2K_3 \end{bmatrix} = s^3 + (2K_3+5)s^2 + (4+4K_2+2K_3)s + (4K_1)$$

Logo,

$$2K_3 + 5 = 8 \qquad \therefore \qquad K_1 = 2{,}5$$

$$4K_1 = 10 \qquad K_3 = 1{,}5$$

$$4 + 4K_2 + 2K_3 = 17 \qquad K_2 = 2{,}5$$

$$K = [2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 1{,}5]$$

Exemplo 15.17

$\begin{cases} Y = X_1 + 2X_2 \\ U = s X_2 + 8X_1 + 6X_2 \end{cases}$; $X_2 = sX_1 \Rightarrow Y = X_1 + 2sX_1 \rightarrow Y = (2s+1)X_1$

; $U = s^2 X_1 + 8X_1 + 6s X_2 \rightarrow U = (s^2+6s+8)X_1$

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s+1}{s^2+6s+8}$ (Polinômio característico de malha aberta)

(a)

Forma canônica

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$a_0 = 8$

$a_1 = 6$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(b) $(s+8-j8)(s+8+j8) = (s+8)^2 - (j8)^2 = s^2 + 16s + 128$ $\begin{cases} b_0 = 128 \\ b_1 = 16 \end{cases}$

$K_1 = b_0 - a_0$ $\quad K = [120 \quad 10]$

$K_2 = b_1 - a_1$

Exemplo 15.18

(a) A, B, C, D

(b) K? para $s_{1,2} = -10 \pm j10$ e $s_3 = -10$

A_f?

(c)

(a) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$

$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

$(s+1)(s+2)(s+5) = (s^2+3s+2)(s+5)$

$s^3 + 3s^2 + 2s + 5s^2 + 15s + 10 = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(b) $= (s+10+j10)(s+10-j10)(s+10)$

$= [(s+10)^2 - (j10)^2](s+10)$

$= (s+10)^3 + (s+10) \times 100$

$= (s^2 + 20s + 100)(s+10) + (100s + 1000)$

$= s^3 + 20s^2 + 100s + 10s^2 + 200s + 1000 + 100s + 1000$

$= s^3 + 30s^2 + 400s + 2000$

$$A_f = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2000 & -400 & -30 \end{bmatrix} \\ \quad f_0 \qquad f_1 \qquad f_2 \end{array}$$

$K_1 = f_0 - a_0 = 2000 - 10$

$K_2 = f_1 - a_1 = 400 - 17$

$K_3 = f_2 - a_2 = 30 - 8$

$\therefore K = [1990 \;\; 383 \;\; 22]$

Projeto de controle Integral

Exemplo 15.19

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [1 \;\; 0]\, x$$

PI com pólos em $-10 \pm j8$ e -20

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & B k_{n+1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \;\; K_2] \right) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_3 \\ -[1 \;\; 0] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 - K_1 & -7 - K_2 & K_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 10 + K_1 & s + 7 + K_2 & -K_3 \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix} = s^3 + (K_2 + 7)s^2 + (K_1 + 10)s + K_3$$

$= (s + 10 - j8)(s + 10 + j8)(s + 20)$

$= [(s+10)^2 - (j8)^2](s + 20)$

$= (s^2 + 20s + 100 + 64)(s + 20)$

$= s^3 + 40s^2 + 564s + 3280$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2 + 7 = 40 \\ K_1 + 10 = 564 \\ K_3 = 3280 \end{array} \right.$$

$\therefore K = [554 \;\; 33 \;\; 3280]$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det[M]} \cdot [cofat]^T$$

Transformação Linear

$$\boxed{\begin{matrix} x = Px' \\ x' = Qx \end{matrix} \quad ; \quad P = Q^{-1}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} A' = P^{-1}AP & C' = CP \\ B' = P^{-1}B & D' = D \end{matrix}}$$

Para verificar a transformação linear, podemos analisar $\boxed{PA' = AP}$ e se os autovalores de A e A' são os mesmos: $\boxed{\det[sI - A] = \det[sI - A']}$

Diagonalização da matriz do sistema - Autovalores

$$\boxed{[A - s_i I]p_i = 0}$$

Matriz de Observabilidade

$$Mob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Caso $\det[Mob] \neq 0$ Observavel
- Para $Ad \to C'$ { Não possuir "0" }

$$P = (Mob)^{-1} Mob'$$

Matriz de Controlabilidade

$$\boxed{M_c = [B \quad AB \quad A^2B \cdots A^{n-1}B]}$$

$\det[M_c] \neq 0$ Controlável

Para $Ad \to B'$ { Existir 0 $\to$ Controlável

$$P = M_c (M_c')^{-1}$$

$$\Delta\phi(s) = \det[sI - (A - BK)]$$

Forma canônica controlável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = [c_0 \; c_1 \; c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Forma Canônica Observavel

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad y = [1 0 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$PI: \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_{n+1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$