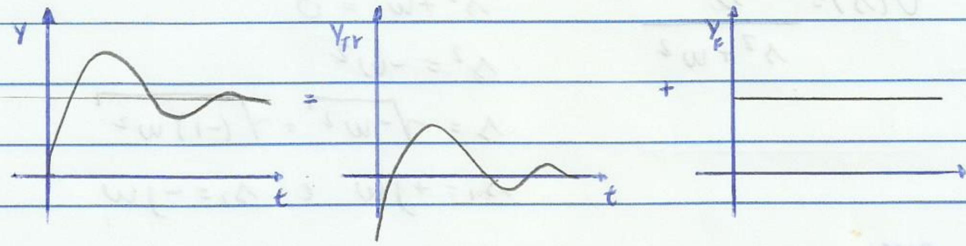
Resposta em frequência

A resposta de um sistema linear a uma excitação qualquer consta, em geral, de duas partes: componente natural e componente forçada da resposta

$$y(t) = y_{Tr}(t) + y_F(t)$$



Resposta natural — Resposta forçada
também é chamada
de resposta transitória

O objetivo do estudo da Resposta em frequência é a determinação da resposta forçada de um sistema linear, invariante no tempo, a uma excitação senoidal $u(t)$:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_0)$$

A resposta forçada $y_F(t)$ pode ser representada por uma função senoidal com a mesma frequência ω

$$y_F(t) = Y_m \cos(\omega t + \theta_0')$$ Resposta harmonica do sistema

O método para obter a resposta ~~em frequência~~ forçada no domínio do tempo, a partir da função de transferência do sistema, sem fazer a transformada inversa de laplace.

Função senoidal de transferência

Para uma entrada $u(t) = \cos wt$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\cos wt]$$

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

$$s^2 + w^2 = 0$$
$$s^2 = -w^2$$
$$s = \sqrt{-w^2} = \sqrt{(-1) w^2}$$
$$s_1 = +jw \quad e \quad s_2 = -jw$$

Sabendo que:

$$X(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y(s)$$

Excitando o sistema acima com $U(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$Y(s) = G(s) \frac{s}{s^2 + w^2} = G(s) \frac{s}{(s - jw)(s + jw)}$$

Desenvolvendo a equação teremos que:

$$Y(s) = Y_L(s) + Y_F(s)$$

Resposta   Resposta Natural   Resposta Forçado

Para o estudo da Resposta em frequência, apenas analizamos a resposta forçada.

$$Y_F(s) = \frac{C_1}{s - jw} + \frac{C_2}{s + jw}$$

$$C_1 = Y(s)(s-jw)\Big|_{s=jw} = \frac{G(s).\,s}{s+jw}\Big|_{jw} = \frac{1}{2}G(jw).$$

$$C_2 = Y(s)(s+jw)\Big|_{s=-jw} = \frac{G(s)\,s}{s-jw}\Big|_{-jw} = \frac{1}{2}G(-jw)$$

Exemplo 7.1 $\quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{s+100} \qquad u(t) = 5 \operatorname{sen}(2\pi f.t)$

$f = 15.916\ Hz$

a) Função de transferência

Para $s = jw \therefore G(jw) = \frac{100}{100 + jw}$

$w = 2\pi f = 2\pi.15,916 = 100$

$$G(100j) = \frac{100}{100+100j} = \frac{100}{100\sqrt{2}\angle 45} = 0,707\angle{-45}$$

b) Amplitude

Resposta Forçada tem uma amplitude

$Y_m = |G(jw)|U_m$

$Y_m = 5|G(j100)|$

$Y_m = 5|0,707\angle{-45}| \quad \therefore Y_m = 3,54$

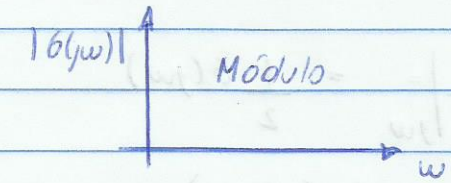
c) Angulo $\quad \phi - 45$

$\therefore \quad y(t) = 3,54 \operatorname{sen}(100t - 45^\circ)$

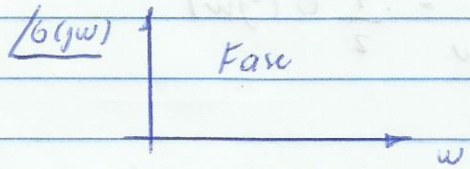
Representações gráficas da resposta em frequência

↳ São chamados de Diagramas de Bode

Diagramas de Bode



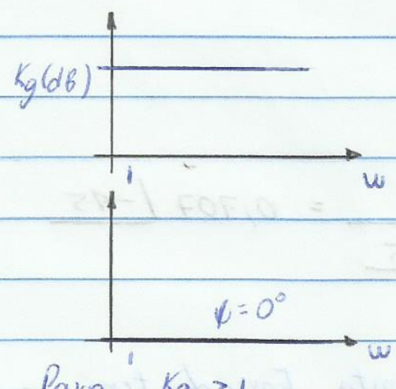
Representa o ganho do Sistema

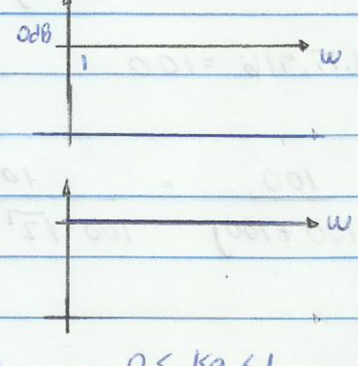


Representa a fase

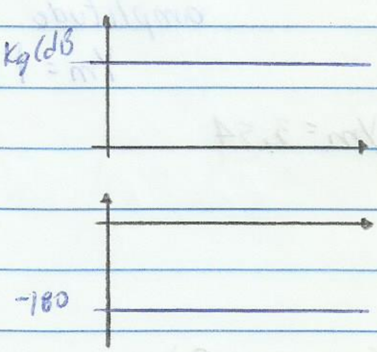
Função de transferência constante

$$K_g(dB) = 20 \log_{10} |K_g|$$

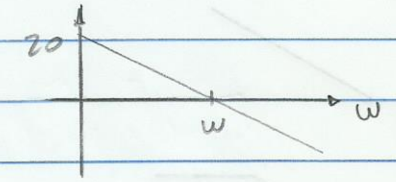


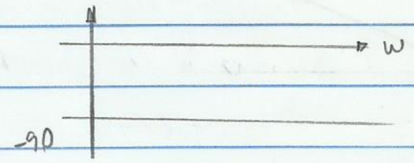


Para $K_g > 1$ $\qquad$ $0 < K_g < 1$

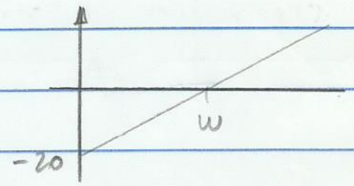


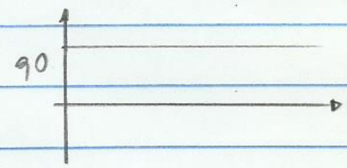
Função de transferência com pólo na origem



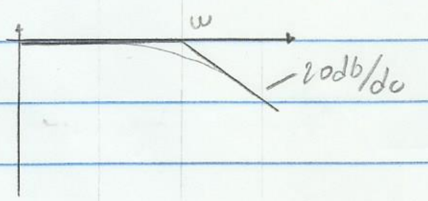


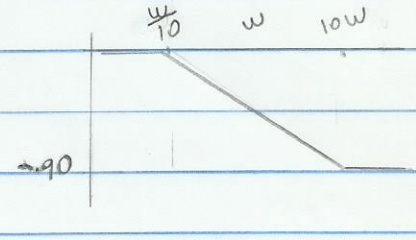
Função de transferência com apenas um zero na origem





Função de transferência com um polo real fora da origem





Função de transferência com um zero real fora da origem

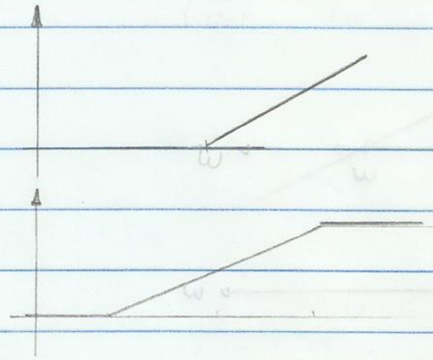


Diagrama de Nyquist

O Critério de Nyquist relaciona a estabilidade de um sistema a malha fechada à resposta de fr a m.a e a localização dos pólos. Desta maneira, o conhecimento da resposta de fr do sistema a malha aberta conduz à informação sobre a estabilidade do sistema a mf.

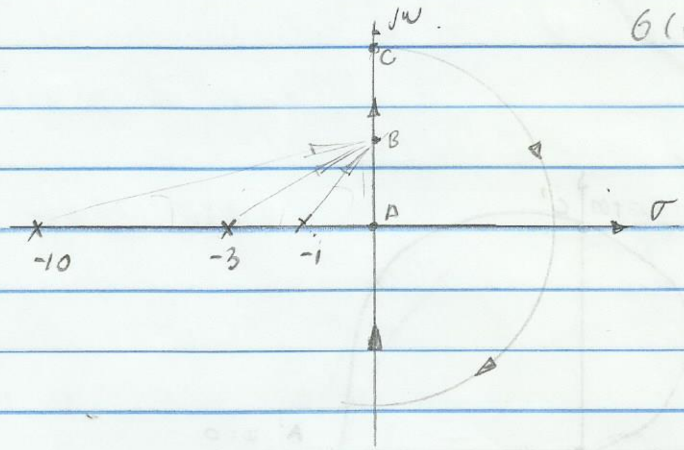
Exemplo 10.4 (Nise)

$$G(s) = \frac{500}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

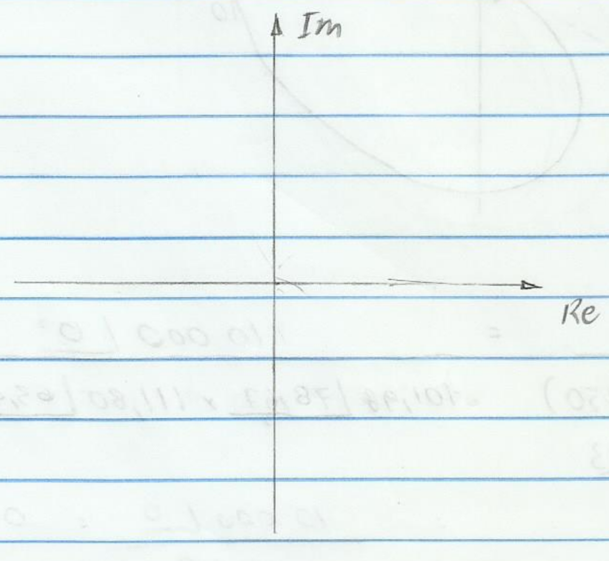
$$G(0) = \frac{500}{30} = \frac{50}{3} = 16{,}67$$

$$G(\infty) = 0$$

$G(\omega) =$



$|A'| =$



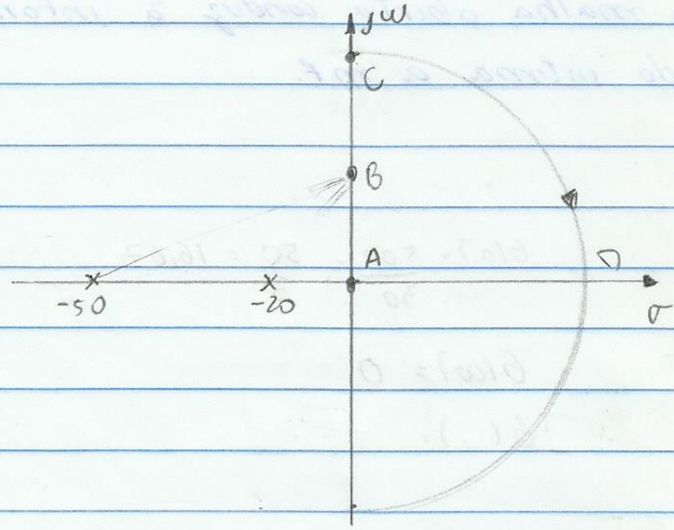
Exercício 2) (Controle Essencial)

a)

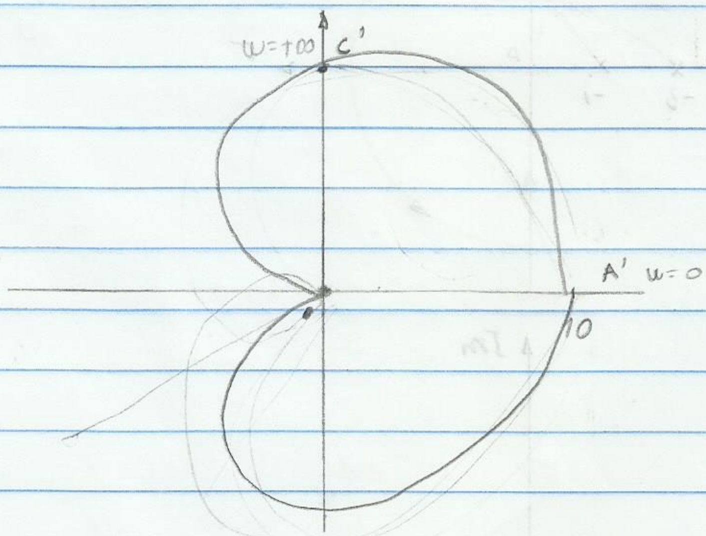
$A(s) = G(s)H(s)$

$$A(s) = \frac{10\,000}{(s+20)(s+50)}$$

	A	B	C
s	0	∞	
ρ	10	0	
θ	0	-90	



$$A(\infty) = \frac{1000}{\infty \angle 90} = 0 \angle -90$$

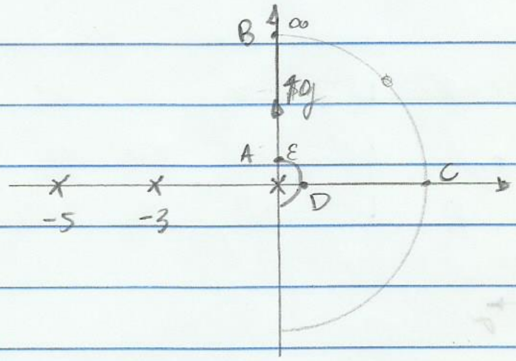


$$A(j100) = \frac{10\,000}{(j100+20)(j100+50)} = \frac{10\,000 \angle 0°}{101{,}98 \angle 78{,}67 \times 111{,}80 \angle 63{,}43}$$

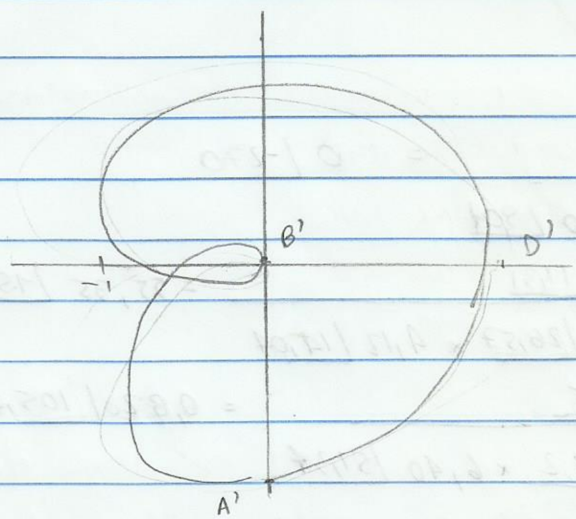
$A(j100) = 0{,}877 \angle -142{,}13$

$$A(\infty + 0j) = \frac{10\,000}{(\infty + 0j + 20)(\infty + 0j + 50)} = \frac{10\,000 \angle 0}{\infty \angle 0} = 0 \angle 0°$$

b) $A(s) = \dfrac{50}{s(s+3)(s+5)}$



$+x \angle 180 = \dfrac{50 \angle 0}{(a+jb)(a+jb+3)(a+jb+5)}$



Z =

P=0

N=0

Z = P+N = 0

$A(0+j\varepsilon) = \dfrac{50}{j\varepsilon + (j\varepsilon+3)(j\varepsilon+5)} = \infty \angle -90$

$5\angle 0 \cdot 3\angle 0 \quad 0\angle 90 \quad \overline{0\angle 90}$

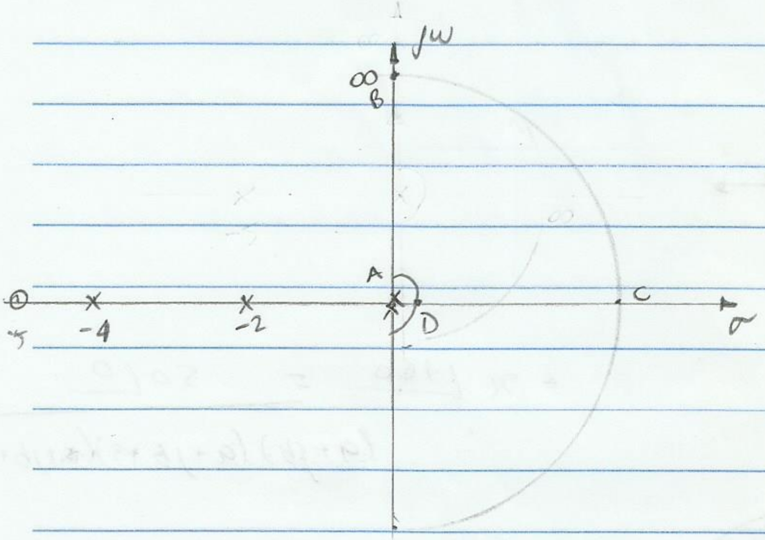
$A(j\infty) = \dfrac{50}{\underset{\angle 90}{j\infty}\underset{\angle 90+}{(j\infty+3)}\underset{\angle 90+}{(j\infty+5)}} = \dfrac{50\angle 0}{\infty \angle 270} = 0 \angle -270$

$A(\infty + 0j) = \dfrac{10000}{\infty \angle 0 \times \infty \angle 0 \times \infty \angle 0} = 0 \angle 0$

$A(\varepsilon + 0j) = \dfrac{10000 \angle 0}{\varepsilon \angle 0 \times 3 \angle 0 \times 5 \angle 0} = \infty \angle 0$

$A(4j) = \dfrac{10 \cancel{000} \angle 0}{4 \angle 90 \times 5 \angle 53 \times 6{,}4 \angle 38{,}6} = 0{,}4$

c) $A(s) = \dfrac{100(s+5)}{s^2(s+2)(s+4)} = \dfrac{100\,\cancel{s}\,(1+\frac{5}{s})}{s^2(s+2)(s+4)}$

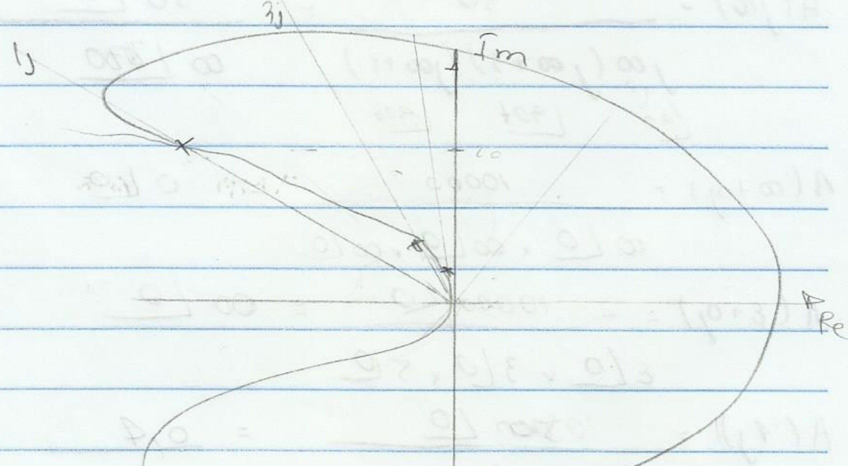


$A(\infty j) = \dfrac{100\,\angle 0}{\infty\angle 90 \times \infty \angle 90 \times \infty \angle 90} = 0\,\angle -270$

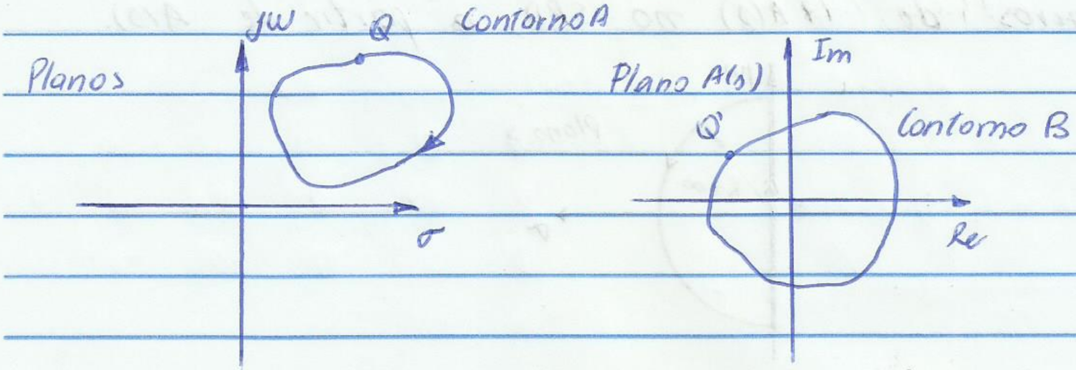
$A(1j) = \dfrac{509{,}9\,\angle 11{,}31}{1\angle 90 \times 1\angle 90 \times 2{,}236\,\angle 26{,}57 \times 4{,}12\,\angle 14{,}04} = 55{,}35\,\angle 150{,}71$

$A(5j) = \dfrac{100 \times 7{,}07\,\angle 45}{5\angle 90 \times 5\angle 90 \times 5{,}39\,\angle 68{,}2 \times 6{,}40\,\angle 51{,}34} = 0{,}82\,\angle 105{,}464$

$A(3j) = 3{,}6\,\angle 118$



Trajetórias fechadas no plano s



Por conveniência:

Trajetórias fechadas no plano s são descritos no sentido anti horário.

Para trajetórias no plano s não envolver nenhum pólo e nenhum zero de $A(s)$, a trajetória correspondente no plano $A(s)$ não envolverá a origem do sistema de referência.

Caso a trajetória envolva n zeros no plano s, a trajetória correspondente no plano $A(s)$ envolverá n vezes a origem no sentido horário. Para o plano s que a trajetória envolva n pólos, a trajetória correspondente envolverá n vezes a origem no sentido anti-horário.

Critério de Nyquist

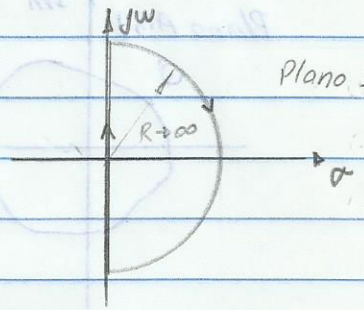
Para uma função de transferência $F(s) = \dfrac{G(s)}{1 + A(s)}$

Sendo $A(s) = G(s)\,H(s) = \dfrac{N_G(s)\,N_H(s)}{D_G(s)\,D_H(s)}$

Para que o sistema seja estável, não pode existir pólos no SPD, logo

$$1 + A = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H}$$

O Diagrama de Nyquist auxilia a detectar a presença de zeros de $1+A(s)$ no SPD, a partir de $A(s)$.



Análise da curva-limite no plano $A(s)$

$N = Z + P$ N: número de voltas no sentido horário

Z: número de zeros.

P: número de pólos.

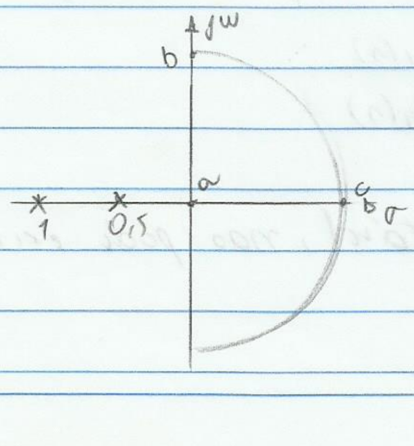
Análise da estabilidade

O número de vezes que o contorno no plano $A(s)$, envolver no sentido horário o ponto crítico -1 é igual ao número de zeros menos o número de polos de $(1+A(s))$ no SPD

$N = Z - P$

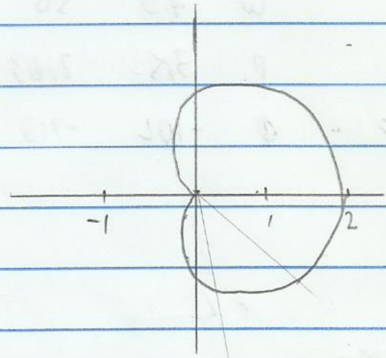
Exemplos:

Para a f.m.a $A(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+0,5)}$

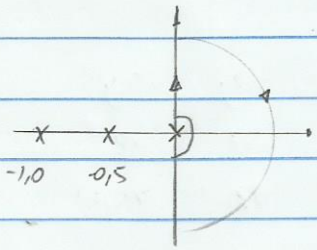


$$A(\sigma + j\omega) = \frac{K}{(\sigma + j\omega + 1)(\sigma + j\omega + 0{,}5)}$$

ω	0	0,25	0,5	0,75	1,00	10	1000
ρ	2	1,74	1,26	0,89	0,63	0,01	0
ϕ	0	-41	-72	-93	-108	-171	-180



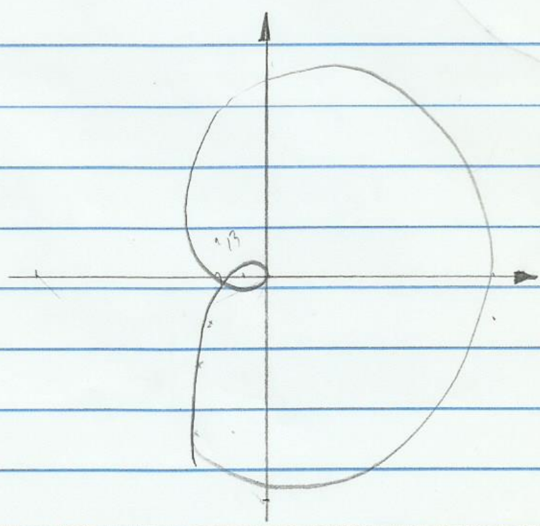
Para $A(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+0{,}5)}$ $\qquad A(\sigma + j\omega) = \dfrac{1}{(\sigma + j\omega)(\sigma + j\omega + 1)(\sigma + j\omega + 0{,}5)}$



ω	ε	0,25	0,75	1,0	10	100
ρ	∞	6,9	1,18	0,63	0,001	0
ϕ	-90	-130	177	162	99	91

$$A(\varepsilon j) = \frac{1\angle 0}{0\angle 90 \times 1\angle 0 \times 0{,}5\angle 0} = \infty \angle -90$$

ω	ρ	ϕ
0,1	19,5	-107
0,2	9,1	-123
0,3	5,5	-137
0,4	3,63	-150

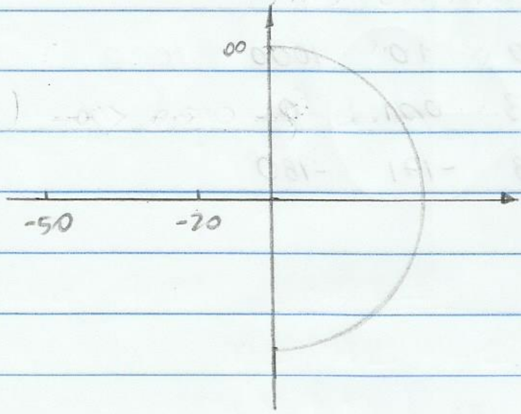


$Z = N + P$; $P = 0$, $N = 2$

$Z = 2$ (Dois polos no SPD)

Instável

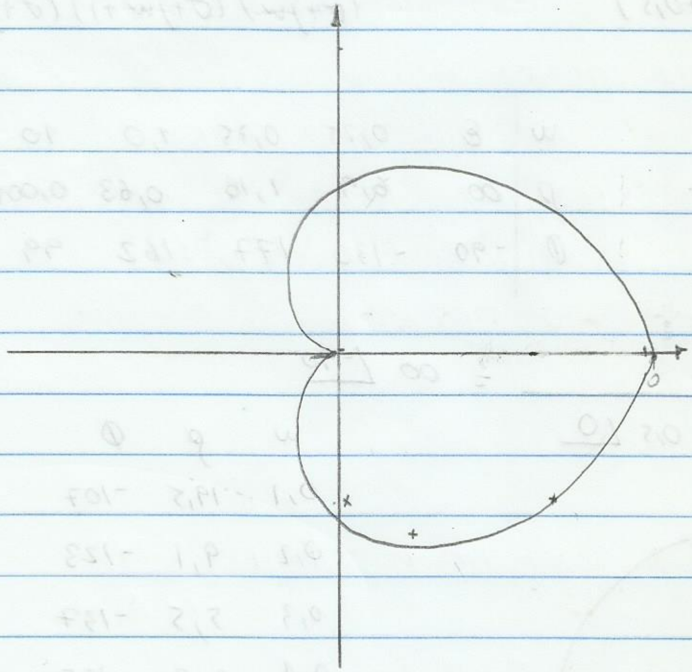
(a) $A(s) = \dfrac{10\,000}{(s+20)(s+50)}$



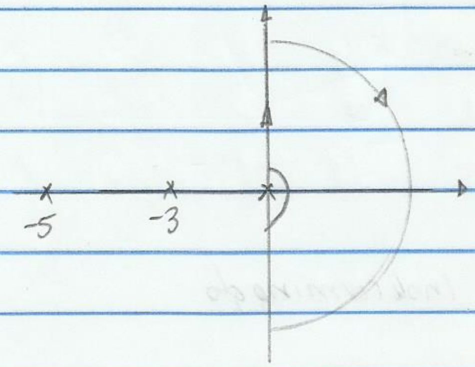
ω	0	∞	10	20	30
ρ	10	0	8,8	6,6	4,8
ϕ	0	-180	-38	-67	-87
ω	40	50	60	70	80
ρ	3,5	2,63	2,02	1,6	1,28
ϕ	-102	-113	-122	-129	-134

$A(0j) = \dfrac{10\,000 \angle 0}{20 \angle 0 \times 50 \angle 0} = 10 \angle 0$

$A(\infty j) = \dfrac{10\,000 \angle 0}{\infty \angle 90 \times \infty \angle 90} = 0 \angle -180$



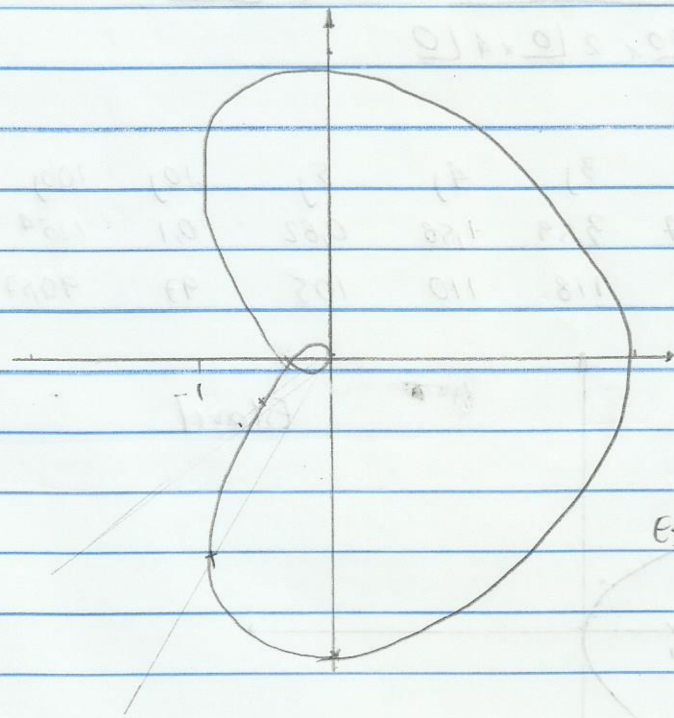
(b) $A(s) = \dfrac{50}{s(s+3)(s+5)}$



ω	ε	∞	1	2	3	4
ρ	∞	0	3,1	1,29	0,67	0,39
ϕ	-90	-270	-120	-145	-166	178

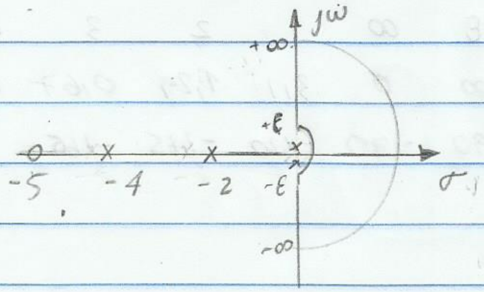
$A(\varepsilon j) = \dfrac{50\angle 0}{0\angle 90 \times 3\angle 0^{+} \times 5\angle 0^{+}} = \infty \angle -90$

$A(\infty j) = \dfrac{50\angle 0}{\infty\angle 90 \times \infty\angle 90^{+} \times \infty\angle 90^{+}} = 0\angle -270$



Estável

b.) $A(s) = \dfrac{100(s+5)}{s^2(s+2)(s+4)}$



Para $A(\infty) = \dfrac{100 \angle 90}{\infty \angle 90 \times \infty \angle 90 \times \infty \angle 90 \times \infty \angle 90}$ Indeterminado.

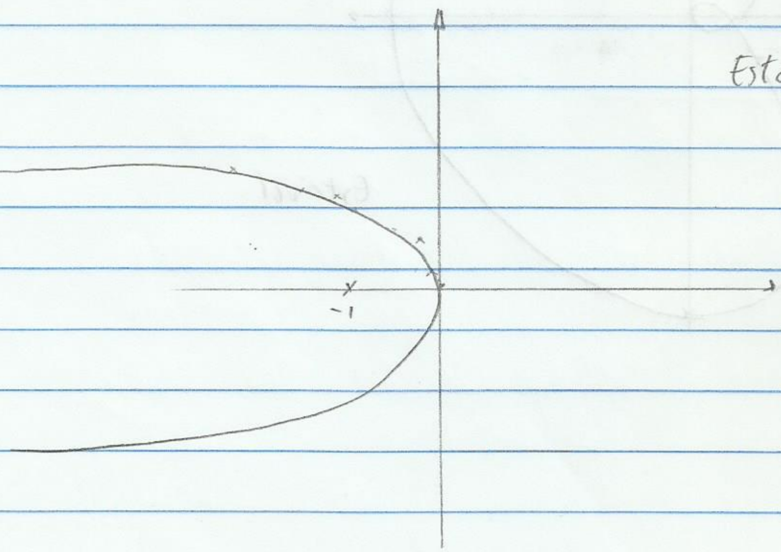
$A(s) = \dfrac{100 \times s(1+\frac{5}{s})}{s^2(s+2)(s+4)}$

$A(\infty j) = \dfrac{1 \angle 0}{\infty \angle 90 \times \infty \angle 90 \times \infty \angle 90} = 0 \angle -270$

$A(\varepsilon j) = \dfrac{100 \times 5 \angle 0}{0 \angle 90 \times 0 \angle 90 \times 2 \angle 0 \times 4 \angle 0} = 0 \angle -180$

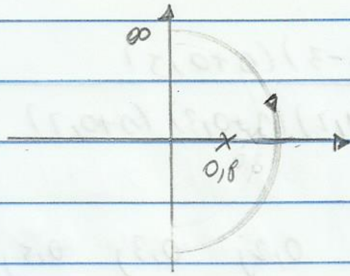
Para outras relações

ω	j	2j	3j	4j	5j	10j	100j
ρ	55,3	10,64	3,59	1,58	0,82	0,1	1.10^{-4}
φ	150,71	130	118	110	105	97	90,57



Estavel

d) $A(s) = \dfrac{1}{s-0{,}8}$



$A(\infty) = \dfrac{1 \angle 0}{\infty \angle 90} = 0 \angle -90$

$A(0) = \dfrac{1 \angle 0}{0{,}8 \angle 0} = 1{,}25 \angle 0$

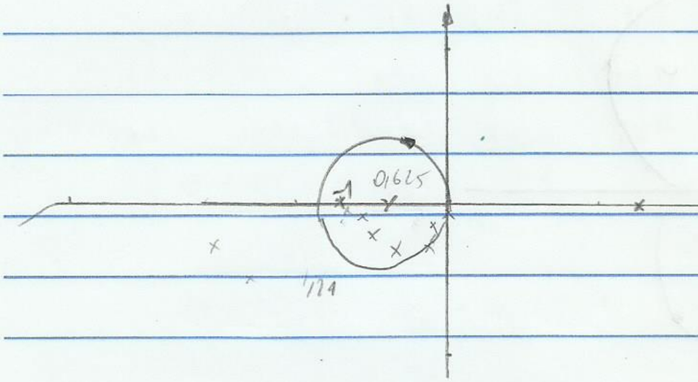
$Z = N + P$

$P = 1$

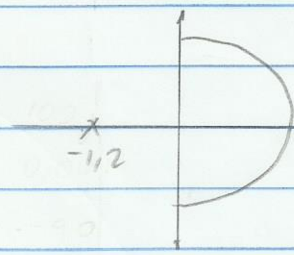
$N = -1$

$Z = 1 - 1 = 0$

↳ Polos no SPD ∴ estável

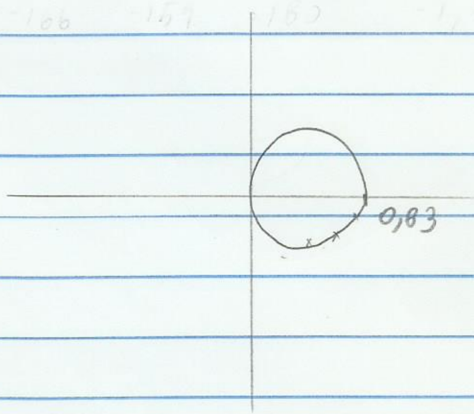


e) $A(s) = \dfrac{1}{s+1{,}2}$



$A(\infty) = \dfrac{1 \angle 0}{\infty \angle 90} = 0 \angle -90$

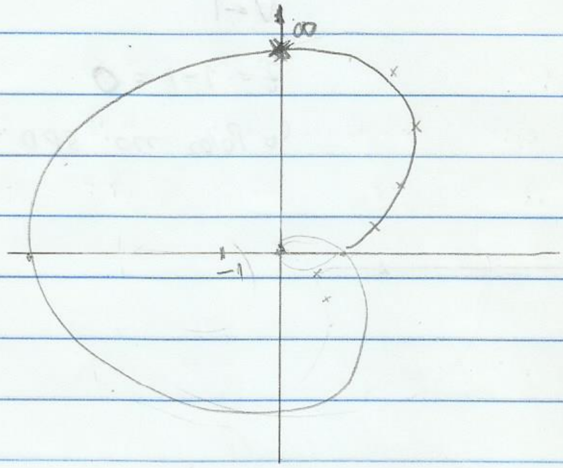
$A(0) = \dfrac{1 \angle 0}{1{,}2 \angle 0} = 0{,}83 \angle 0$

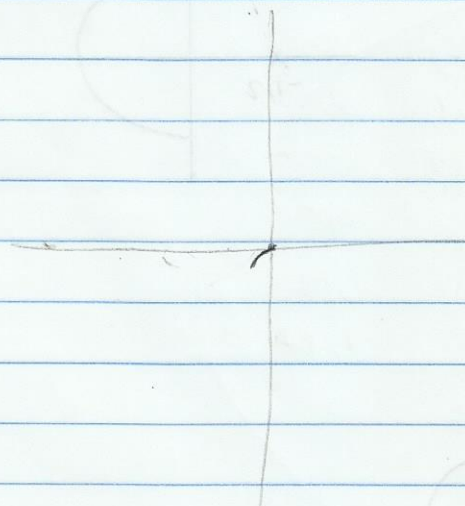


w	ε	0,1j	0,5j	1j	2j	3j	5j	10j	50j	100j
ρ	0,83	0,83	0,77	0,64	0,43	0,31	0,19	0,1	0,02	0
ϕ	0	-4	-22	-40	-59	-68	-78	-83	-88	-89

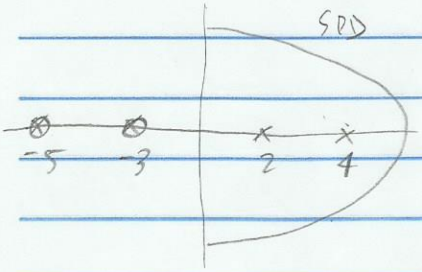
(e) $A(s) = \dfrac{(s-3)(s+0,5)}{(s+1,5)(s+1,2)(s+0,3)(s+0,2)}$

ω	ε	∞	$0,1j$	$0,2j$	$0,3j$	$0,5j$	j	$2j$	$3j$	$5j$
ρ	∞	0	126	52	29	13	4	2	0,44	0,15
φ	90	-180	64	45	33	16	-17	-43	-92	-122





$$A(s) = \frac{K(s+3)(s+5)}{(s-2)(s-4)}$$



$A(0) = 1{,}875 \angle 0$

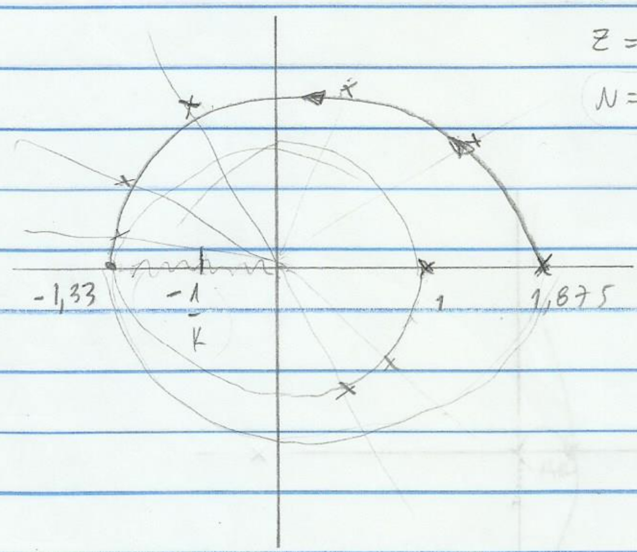
$$A(s) = K\frac{s\left(1+\frac{3}{s}\right) s\left(1+\frac{5}{s}\right)}{s\left(1-\frac{2}{s}\right) s\left(1-\frac{4}{s}\right)}$$

$A(\infty j) = 1 \angle 0$

ω	0	∞	0,1j	0,5j	j	2j	3j	3,2j	4j
ρ	1,875	1	1,87	1,84	1,75	1,54	1,37	1,34	1,27
φ	0	0	7	36	70,35	127	169	176	-159

$Z = Z + N$

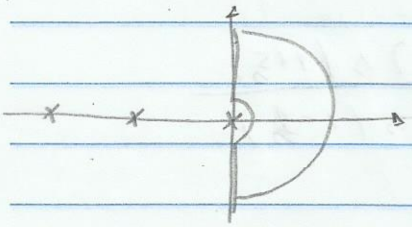
$N = -2$



ω	10	12j	15j	20j	30j	40j	50j
ρ	1,06	1,04	1,03	1,02	1	1	1
φ	-76	-64	-52	-40	-26	-20	-16

$-1{,}33 \leq -\frac{1}{K} < 0$ $\qquad$ $-1{,}33K \leq +1 < 0$

$$A(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+5)}$$

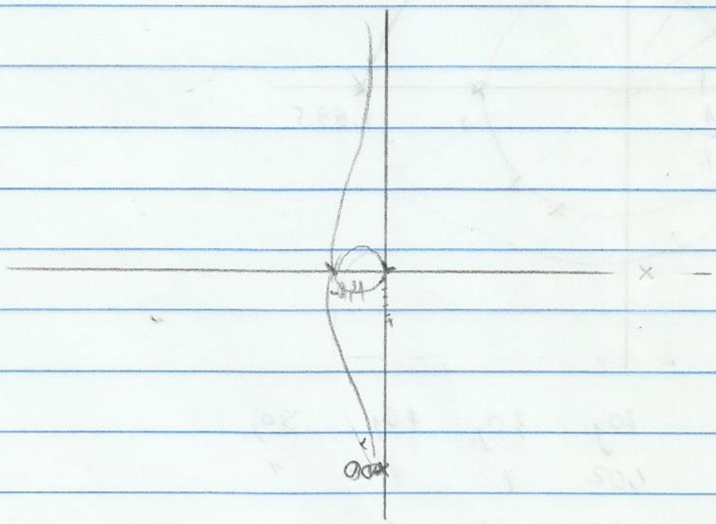


$A(\infty) = 0 \angle 90$

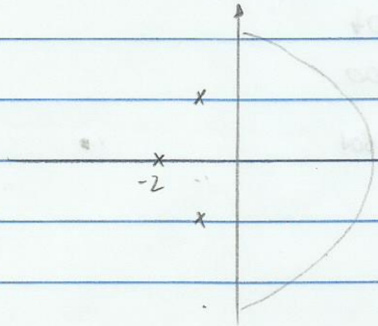
$A(0) = \infty \angle -90$

ω	0	∞	0,1j	0,2j	0,3j	0,5j	1j	2j	3,5j
ρ	∞	0	0,7	0,33	0,22	0,13	0,06	0,03	0,01
φ	-90	90	-93	-96	-99	-105	-120	-145	-174

ω	5j
ρ	0
φ	165



$$A(s) = \frac{6}{(s^2+2s+2)(s+2)} = \frac{6}{(s+1-j)(s+1+j)(s+2)}$$



$A(0) = 1{,}5 \angle 0$

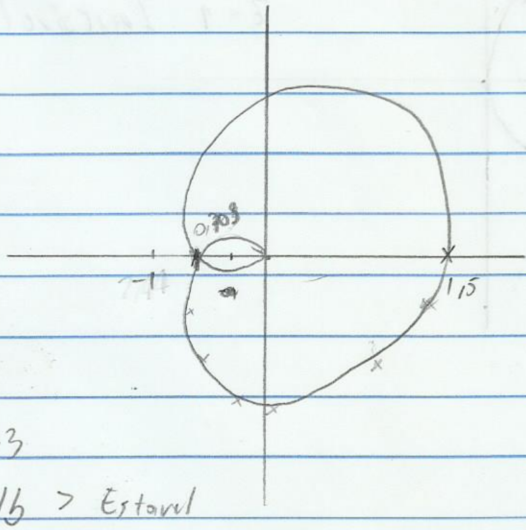
$A(\infty) = 0 \angle 90$

ω	0,1j	0,2j	0,5j	1j	1,2j	1,4j	1,6j	2j	5j
ρ	1,5	1,5	1,4	1,2	1,04	0,9	0,72	0,47	0,04
φ	-9	-17	-44	-90	-108	-124	-139	-161	135

$A(j\omega_c) = A(j2{,}44) = 0{,}3 \angle -180$

$\omega = 2{,}44j$

$0{,}303 \angle -180$



$G_M = 20 \log \left(\frac{1}{\omega_c}\right)$

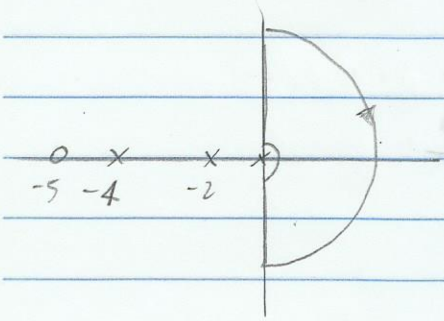
$= -20 \log \omega_c$

$= 9{,}83\,db > 0$ estavel

$G_M = -20 \log 0{,}33$

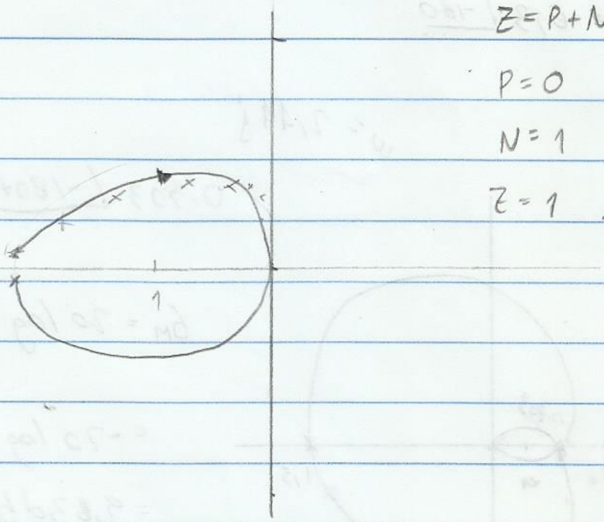
$G_M = 9{,}63\,db >$ Estavel

$$A(s) = \frac{100(s+5)}{s^2(s+2)(s+4)}$$



ω	∞	0^+	0^+
ρ	0	∞	∞
φ	90^+	180^+	-180^+

ω	1j	2j	3j	5j	7j	10j	15j	20j
ρ	55,3	10,64	3,6	0,82	0,3	0,1	0,03	0,01
φ	150	130	1,17	105	100	97	94	93



$Z = P + N$

$P = 0$

$N = 1$

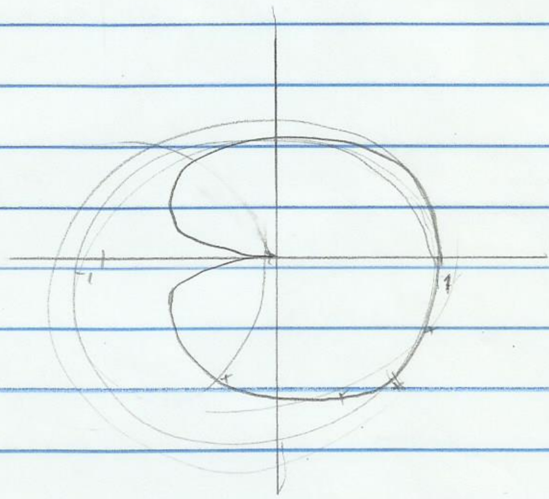
$Z = 1$ Instável

Exercício 3)

$$A(s) = \frac{K}{(s^2+6s+81)} = \frac{K}{(s+3-8{,}5i)(s+3+8{,}5i)}$$

Para $K = 81$

ω	0	∞	0,1j	0,5j	5j	6j	7j	10j
ρ	1	0	1	1	1,27	1,41	1,53	1,29
φ	0	-180	-0	-2	-28	-38	-52	-108



$Z = N + P$

$P = 0$

$N = 0$

$Z = 0$

Estável

Procedimento de Projeto

1º Passo) Normalize a função de transferência em malha aberta e trace o gráfico de Bode

2º Passo) Usando as equações a seguir determine a margem de fase requerida

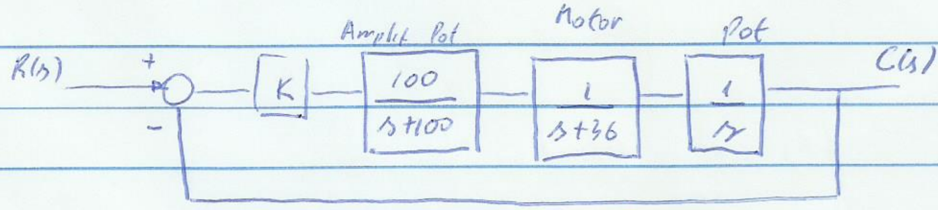
$$MF = tg^{-1} \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}}$$

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{UP\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{UP\%}{100}\right)^2}}$$

3º Passo) Determine a frequência ω_{Φ_M}, no diagrama de fase de Bode que leva a margem de fase requerida.

4º Passo) Mude o ganho para forçar a curva de modo de Bode cruzar ~~o~~ 0 DB na frequência $\omega_{\Phi M}$. O ajuste de ganho constitui o valor que deve ser adicionado para produzir a margem de fase requerida.

Exemplo Determinar K p/ termos UP% = 9,5 %



$$G(s) = \frac{100K}{s(s+36)(s+100)} = \frac{\cancel{100}\,K}{\cancel{100}\times 36\, s\left(\frac{s}{36}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$\therefore G(s) = \frac{(1/36)\,K}{s\left(\frac{s}{36}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

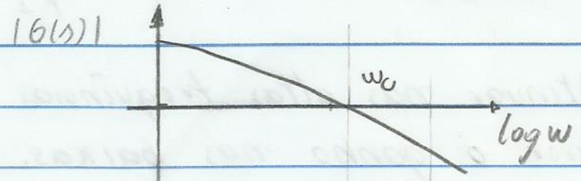
$$\zeta = \frac{-\ln 0{,}095}{\sqrt{\pi + (\ln 0{,}095)^2}} \quad \therefore \zeta = 0{,}6$$

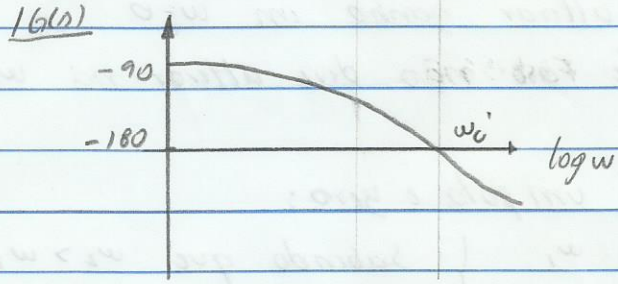
$$w_{\phi n} = 14{,}3 \ \frac{rad}{s} \rightarrow \phi_n = 59{,}2^\circ$$

$$K_{dB} = 54{,}9 \ dB$$

$$K_{dB} = 20 \log K \quad \therefore K = 555{,}9$$

Margens de Estabilidade





Para $MG(dB) > 0$, $MF > 0$ e $w_c' > w_c \rightarrow$ Estável

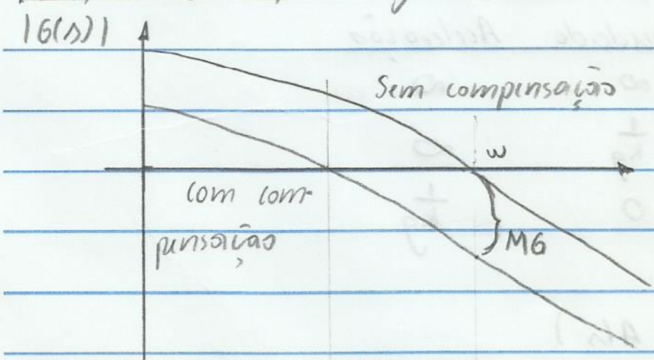
Para $MG(dB) < 0$, $MF < 0$ e $w_c' < w_c \rightarrow$ Instável

Para um bom desempenho do sistema, em geral se requer:

$6\ dB < MG < 20\ dB$ e $30° < MF < 60°$

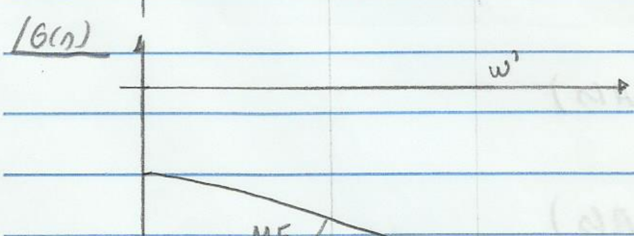
Compensação por ajuste de Ganho

(Tem influência no overshoot $\%UP$)



Apenas modifica o ganho do sistema.

Neste caso é necessário diminuir a frequência de cruzamento de ganho w_c, logo diminuir a constante de ganho.



$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^4}}}\right)$$

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{UP\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{UP\%}{100}\right)^2}}$$

Compensação por atraso de fase (LAG) (Variação do PI)

Destinado para: - Atenuar nas altas frequências sem alterar o ganho nas baixas.
- Minimiza erro estacionário s/ alterar transitório

Pode-se: ↑ MF sem alterar ganho em $w=0$

Frequência de Fase não deve alterar na w_c

Portanto, adiciona-se um pólo e zero:

pólo em w_1
zero em w_2 } Sabendo que $w_2 > w_1$

$w(\text{zero}) > w(\text{pólo})$

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{w_2}}{1 + \frac{s}{w_1}} = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad ; \quad a = \frac{w_1}{w_2} < 1 \qquad T = \frac{1}{w_1}$$

Procedimento

(1) Ajuste o ganho K_g de malha aberta $A(s) = G(s)H(s)$ para satisfazer ao erro estacionário.

Sistema \ Erro	Posição	Velocidade	Aceleração
0	$\frac{1}{1+K_g}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_g}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_g}$

$$\varepsilon_{stp} = \frac{1}{1+K_g} \; ; \quad K_g = \lim_{s \to 0} A(s)$$

$$\varepsilon_{stv} = \frac{1}{K_g} \; ; \quad K_g = \lim_{s \to 0} s\,A(s)$$

$$\varepsilon_{sta} = \frac{1}{K_g} \; ; \quad K_g = \lim_{s \to 0} s^2 A(s)$$

$$w_2 = 0{,}1\,\bar{w}_c$$

Compensador por Avanço da fase (Lead)

- Aumenta a margem de fase (MF) do sistema
- Melhora a resposta transitória sem alterar a resposta estacionária.

Adiciona um zero em w_2 e um pólo w_1
Sendo $w_1 > w_2$

$$G_c = \frac{1 + \frac{s}{w_2}}{1 + \frac{s}{w_1}} = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad , \quad w_1 > w_2 \quad aT = \frac{1}{w_2} \quad , \quad T = \frac{1}{w_1}$$

(1) Ajuste o ganho K_g de malha aberta para satisfazer aos erros estacionário

(2) $\phi_m = \Delta\phi + \Delta\varphi$ onde $\Delta\varphi$ (5° a 20°)

(3) $a = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\phi_m}{1 - \operatorname{sen}\phi_m}$ $\quad a_{dB} = 20 \log(a)$

(4) Obtenha w_m no gráfico quando o ganho é $\frac{a_{dB}}{2}$ $\left(-\frac{a_{dB}}{2}\right)$

(5) $w_2 = \dfrac{w_m}{\sqrt{a}}$; $w_m = \sqrt{w_1 w_2}$

(6) $w_1 = a w_2$

Exemplo 13.14

$$G(s) = \frac{120\,000}{s(s+10)(s+60)}$$

Normalizando => $G(s) = \dfrac{120\,000}{10 \times 60 \times s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{60}+1\right)}$

$$G(s) = \frac{200}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{60}+1\right)}$$

(a) Constante de ganho de baixa frequência (Kg) e margens de ganho e de fase

$Kg = 200 \qquad Kg_{dB} = 20 \log 200 \therefore Kg_{dB} = 46\,dB$

$MF = 180 - 200 = -20°$ (Quando $w_c = 40$ rad/s)

$MG = 0 - 9 = -9\,dB$ (Quando $w_c' = 24{,}5$ rad/s)

Como as margens de fase e de ganho são negativas o sistema é instável.

(b) Calcule $G_c(s)$ por atraso de fase (LAG), para MF $\Delta\phi = 40°$, sem alterar o ganho de baixa frequência Kg do sistema inicial.

$$G_c = \frac{1 + \frac{s}{w_2}}{1 + \frac{s}{w_1}} \quad ; \quad w_2 > w_1$$

$MF = 40+5 \therefore MF = 45°$ encontra-se em $\bar{w}_c = 7,7$ rad/s
e $a(dB) = -26,2$ rad/s

$\therefore -26,2 = 20 \log a \therefore a = 0,049$

$a = \dfrac{w_1}{w_2} < 1 \qquad 0,1\,\bar{w}_c \leq w_2 \leq 0,5\,\bar{w}_c$

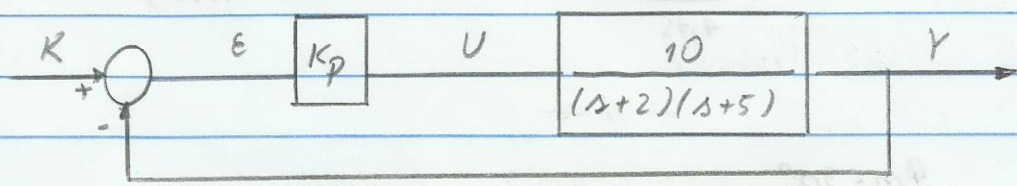
Para frequência de cruzamento do sistema compensado $\bar{w}_c$

$0,1 \times 7,7 \leq w_2 \quad \therefore \quad w_2 = 0,77$ rad/s $\quad$ e $w_1 = 0,038$ rad/s

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{0,77}}{1 + \frac{s}{0,038}} = \frac{0,038}{0,77} \times \frac{(0,77+s)}{(0,038+s)} \quad \therefore G_c(s) = \frac{0,05\,(s+0,77)}{(s+0,038)}$$

Problemas propostos $\qquad K_p = 3,9$

1.)



Projete um controlador proporcional de ganho K_p com $\zeta = 0,5$

$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}\right) \quad e \quad \zeta = \frac{-\ln\left(\frac{UP\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{UP\%}{100}\right)^2}}$$

$$\text{Para } \zeta = 0,5 \Rightarrow MF = tg^{-1}\left(\frac{2 \times 0,5}{\sqrt{-2 \times 0,5^2 + \sqrt{1 + 4 \times 0,5^4}}}\right)$$

$\therefore MF = 51,83° \rightarrow \bar{w}_c = 6,9$ rad/s e magnitude $= -15,7$

logo para $MF = 51,83$ de soma 15,7dB

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)} \qquad -15,7 = 20 \log a \qquad K_p = 6,09$$

$\therefore a = 6,09$

16) Determine o compensador por avanço de fase para $MF = 30°$

$G(s) = \frac{25}{s^2}$

$\phi m = \Delta\phi + \Delta\varphi = 30 + 5 \therefore \phi m = 35°$

$a = \frac{1 + sen\,\phi m}{1 - sen\,\phi m} \therefore a = 3{,}69 \rightarrow a_{dB} = 11{,}34\ dB$

Para $\frac{a_{dB}}{2}$ temos $w_m = 2{,}58\ rad/s$

$w_2 = \frac{w_m}{\sqrt{a}} \therefore w_2 = 1{,}34\ rad/s \quad w_1 = a w_2 \therefore w_1 = 4{,}95\ rad/s$

$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{1{,}34}}{1 + \frac{s}{4{,}95}} \therefore G_c(s) = \frac{3{,}69\,(s + 1{,}34)}{(s + 4{,}95)}$

— // —

Para $\phi m = 30°$

$a = \frac{1 + sen\,\phi m}{1 - sen\,\phi m} \therefore a = 3 \rightarrow 9{,}54\,dB$

Para $\frac{a_{dB}}{2}$ temos $w_m = 2{,}9\ rad/s$

$w_2 = \frac{w_m}{\sqrt{a}} \therefore w_2 = 1{,}67\ rad/s \quad \therefore w_1 = 5{,}02\ rad/s$

Para $\phi m = 30 \rightarrow G_c = \frac{3\,(s + 1{,}67)}{(s + 5{,}02)}$

/ /

17-)

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(10s+1)}$$

Deseja-se $MF = 60°$

Projete $G_c(s)$ para atraso de fase para o mesmo erro estacionário

$$G(s) = \frac{100}{10(s+1)(s+0,1)} = \frac{10}{(s+1)(s+0,1)}$$

A frequência $\bar{\omega}_c$ em $\underbrace{(-180+60+5)}_{-115} \Rightarrow \bar{\omega}_c = 0,637$ rad/s e 22,3dB

Prof: 0,659 rad/s e

$w_2 = 0,1\,\bar{w}_c \therefore w_2 = 0,0637$ rad/s

$a = -22,3$ dB $\quad a_{dB} = 20 \log a \therefore a = 0,077$

$a = \frac{w_1}{w_2} \therefore w_1 = 0,005$ rad/s

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{w_2}}{1 + \frac{s}{w_1}} = \frac{w_1}{w_2} \frac{(s+w_2)}{(s+w_1)} \therefore \boxed{G_c(s) = \frac{0,08\,(s+0,06)}{(s+0,005)}}$$

$0,016 \quad \frac{0,1}{0,001}$

18-)

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+1)}$$

Deseja-se: $MF = 90°$

$e_{ss} = 1/101$

Projete $G_c(s)$ para compensador de atraso de fase.

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_g} \;;\; K_g = \lim_{s\to 0} G(s)$$

$$K_g = \lim_{s\to 0} \frac{100}{(s+1)(s+1)} = 100 \qquad e_{ss} = \frac{1}{101}$$

A frequência $\bar{w}_c$ em $\underbrace{(-180+90+5)}_{-85} \Rightarrow \bar{w}_c = 0,9275$

$w_2 = 0,1\,\bar{w}_c \therefore w_2 = 0,093 \qquad a = \frac{w_1}{w_2} \therefore w_1 = 0,002$ rad/s

$-34,6 = 20 \log a$

$\therefore a = 0,019$

$$G_c(s) = \frac{0,019\,(s+0,093)}{(s+0,002)}$$

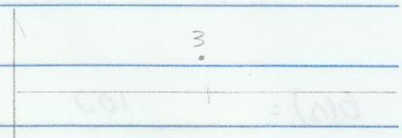
0,1   0,2

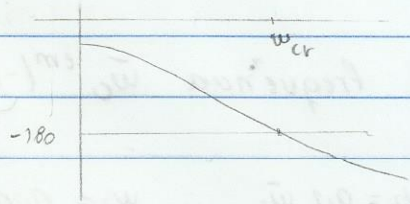
0,02

19-) Para $K_c = 3$ e $\omega_{cr} = 2\,rad/s$

Projete um controlador de atraso de fase $G_c(s)$

Para $K_c = 30$





20-)   0,15 % $t_{rc} = 2,09$ $\xi = 0,86$

0,158 (s + 5,11)

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+8)}$$

(a) Para $K = 45$. Qual o valor do grau de amortecimento ζ?

$$G(s) = \frac{45}{5 \times 8 \times s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{8}+1\right)} \quad \therefore \quad G(s) = \frac{1,125}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{8}+1\right)}$$

$MF = -108 - (-180) \quad \therefore \quad MF = 72°$

$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}\right)$$

$\omega_c = 1\ rad/s$

$\omega_c' = 6,32\ rad/s$

$MG = 21,3\ dB$

/ /

21-)

- Anular erro
- Nao alterar ξ
- Manter resposta estacionária

$$G(s) = \frac{60}{(s+5)(s+8)}$$

$$MF = tg^{-1}\left[\frac{2\xi}{\left(\sqrt{1-4\xi^4} - 2\xi^2\right)^{1/2}}\right]$$

Normalizando $\Rightarrow$ $G(s) = \dfrac{60}{5\times 8\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{8}+1\right)}$ $\therefore$ $G(s) = \dfrac{1{,}5}{\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{8}+1\right)}$

$MG = 115°$

$w_c = 4\ rad/s$

Problemas do Nise

1.) Projeto: K para $MG = 10\,dB$

(a) $G(s) = \dfrac{K}{(s+3)(s+9)(s+15)}$

Para $K = 1$:

Temos $\omega_c' = 15{,}7$ rad/s $\rightarrow MG = 76$

Portanto para $MG = 10$ devo somar $(76-10) = 66$ dB

$K_{dB} = 20 \log K \therefore K = 1995{,}3$

(b) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+3)(s+9)}$

Para $K = 1$

Temos: $\omega_c' = 5{,}2$ rad/s $\rightarrow MG = 50{,}2$

Portanto, para $MG = 10^\circ$ deve-se somar $40{,}2$

$40{,}2 = 20 \log K \therefore K = 102{,}3$

(c) $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+3)(s+4)(s+5)}$

Para $K = 1$

$\omega_c' = 5{,}05$ rad/s $\quad MG = 48$

$38 = 20 \log K \therefore K = 79{,}43$

LABORATÓRIO

1ª Experiência: "Revisão - Critérios de Qualidade"

A qualidade de um sistema com realimentação — É avaliado:
- No domínio do tempo
- Sinal de excitação
- Erro atuante final (ou Estacionário)

Ex: - Kit LJ
- Amortecedor de carro
- Avião e etc

Tipos de excitação:
- Degrau (Fácil pra ser gerado)
- Rampa (Limitada pela Fonte de alimentação)
- Impulso (Matematicamente complicado)
- Senoidal (Entrada mais simples)

WHY usar degrau para representação do sistema de 2ª ordem?

1º Facilmente realizável
2º Permite determinar Função de transferência e calcular a resposta em qualquer outro tipo de excitação

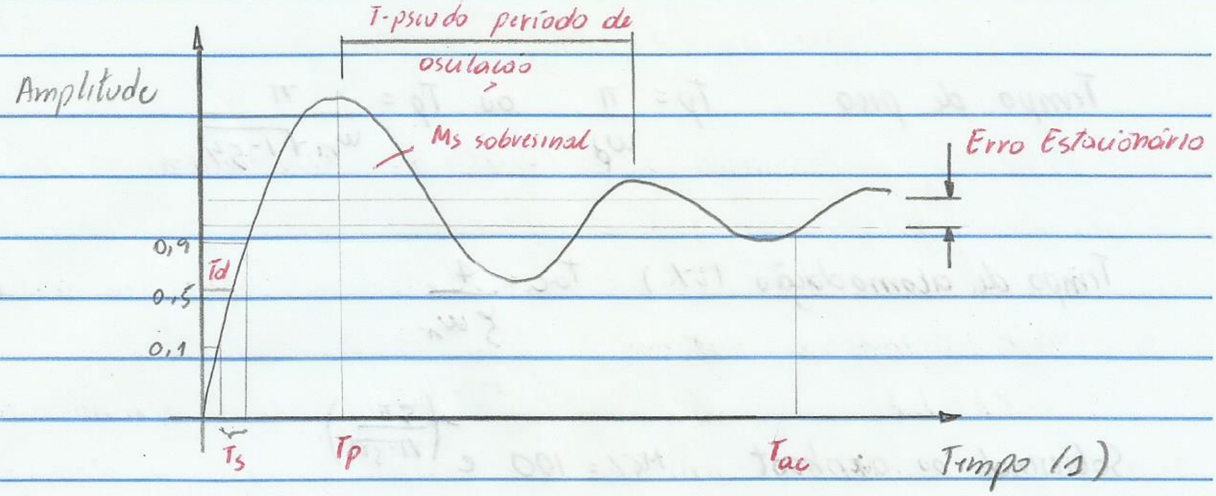
Relembrando:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2$$

Caso:
- $\alpha^2 > \omega_n^2$ ou $\xi > 1$ Superamortecido
- $\alpha^2 = \omega_n^2$ ou $\xi = 1$ Crítico
- $\alpha^2 > \omega_n^2$ ou $0 < \xi < 1$ Subamortecido

ω_n: Frequência natural não amortecida
ω_d: Frequência natural amortecida
ξ: Coeficiente de amortecimento

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$



Td: Tempo de atraso (Tempo até 50% do valor final)
Ts: Tempo de subida (rise time): Variação do tempo de 10% a 90% do valor final
Tp: Tempo de pico
Tac: Tempo de acomodação (settling time): Tempo necessário para a curva da resposta alcança ± 2%
Ms: Sobresinal (overshoot).

$$M_s\% = \frac{Y(t) - Y(\infty)}{Y(\infty)} \times 100\%$$

T: Pseudo período, sendo a frequência natural amortecida

$$\omega_d = 2\pi \frac{1}{T}$$

INFLUÊNCIA do Grau de amortecimento ξ

$0,4 < \xi$ Sobressinal Elevado
$\xi > 0,8$ Sistema muito lento
$0,4 < \xi < 0,8$ Resposta transitória satisfatória

Tempo de pico $T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ ou $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

Tempo de acomodação (2%) $T_{ac} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

Sobresinal ou overshoot $M_S\% = 100\, e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$.

A Função de Transferência de um sistema posicionador em malha fechada:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Perguntas:

- Como achar função de Transferência utilizando o gráfico subamortecido?
- Efeito da zona Morta no Sistema Posicionador?
- Bloco $^6/_s$ no diagrama de blocos?
- Relação entre K_p e ζ?

Zona Morta: - É uma NÃO linearidade dos servomecanismo
- Causados pelas forças de atrito de Coulomb e desgaste natural no controle de posição

Portanto, ZONA MORTA limita a habilidade do motor em responder a pequenas entradas.

Relação entre K_p e ζ : Quanto MAIOR K_p resulta no AUMENTO de Sobresinal (%UP), DIMINUI taxa de amortecimento ζ, AUMENTA T_{ac}.

2ª Experiência: "Compensação Tacométrica"

"O objetivo do experimento é analisar um sistema com realimentação de velocidade"

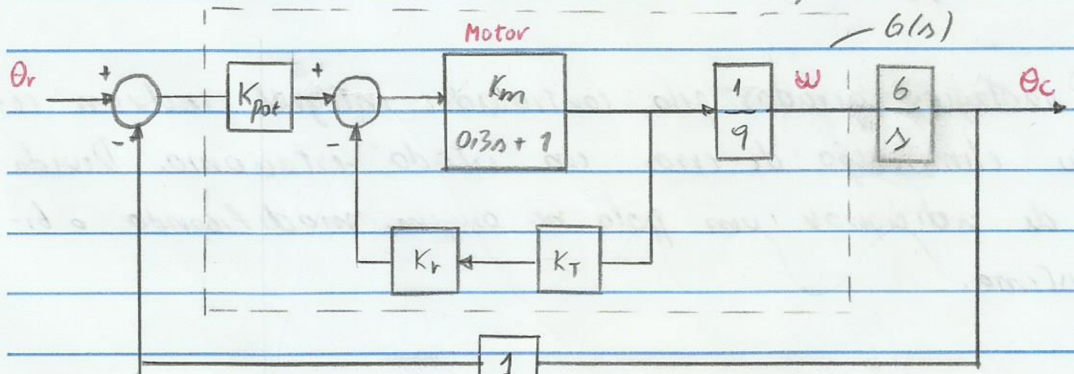
A Compensação Tacométrica é uma solução para sistemas posicionadores.

Soluciona este caso → "Quando aumentamos o ganho proporcional K_p, afeta ξ e ω_n ao mesmo tempo. Portanto não tem uma resposta rápida e suficientemente amortecida."

Isso acontece porque o sistema pode ser de primeira ordem ou superior, logo ω_n é em função de ξ.

Com a adição da realimentação da velocidade no sistema posicionador, irá REDUZIR o tempo de atraso logo REDUZIRÁ o ganho de estado estacionário. K_p será utilizado para compensar atenuação da realimentação.

CUIDADO: Sinal insuficiente da realimentação pode causar aumento excessivo do ganho proporcional K_p



$\omega_n \uparrow$: $\uparrow K_{pot}$

$\xi \downarrow$: $\uparrow K_{pot}$

Considerações Finais:

- Aumento do ganho K_p DIMINUI o erro estacionário, mas NÃO ZERA.

- COM A REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE torna-se o sistema MAIS RÁPIDO e DIMINUI ERRO a ZERO.

- Entretanto, cria uma distorção e diminui o ganho estático. Para corrigir adiciona um FPA em série com a realimentação, permitindo somente a passagem do transiente.

3ª Experiência: "Controlador PID"

Objetivo: Estudar os Controladores PI, PD e PID.

Compensação Proporcional (P)

Basicamente é um ganho K_p em série com o atuador ou planta. Seu objetivo é diminuir o erro.

Para controle de VELOCIDADE surge vibração indesejável

Para controle de POSIÇÃO, devido integração no sistema, K_p é limitado

Compensação Integral (I)

As vantagens geradas pelo controlador integral incluem redução ou eliminação de erros em estado estacionário. Devido ao fato de adicionar um pólo na origem, modificando o tipo do sistema.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Efeito do Integrador:

Sistema Controlador de Velocidade ⇒ Minimiza os problemas de velocidade quando aplicamos uma carga no ~~eixo do~~ motor.

Sistema Controlador de Posição ⇒ Elimina erro estático e offset

Compensação Derivativa (D)

$$G_c(s) = K_p + K_D s$$

- Melhora o transitório da resposta do sistema, aumentando a estabilidade do sistema
- Não tem efeito a compensão derivativa sozinha para eliminar erro de posição ou velocidade

Compensação PID

Podemos combinar os compensadores P, I e D da maneira que desejar. Por exemplo:

- Compensador I produz instabilidade no sistema de controle de posição devido a defasagem criada e fazendo que o sistema fique instável. Devido as características do Compensador P de reduzir o atraso de fase, podemos usar um compensador PI para esta tarefa.

Resumo:

- O Integrador REMOVE erros estáticos de posição, de velocidade e de zona morta do motor. Porém deixa o sistema mais LENTO e aumenta a tendência ser instável.

- Para o Compensador PI, a ação proporcional amortece o sistema. Isso pode MELHORAR o tempo de acomodação.
- A ação derivativa pode estabilizar o sistema, mas é extremamente sensível a ruídos.

REVISÃO DOS CONTROLADORES

Controle Proporcional: Colabora na estabilização do sistema

Controlador Integral: Elimina erro, mas piora a resposta transitória do sistema

Ação Derivativa: Aumenta a estabilidade do sistema, reduzindo sobresinal e o tempo de estabilidade, melhorando a resposta transitória.

Ganhos	Tempo de Subida (T_r)	SobreSinal (M_p)	Tempo de Est. (t_{sd})	Erro de Regime (E_{ss})
K_p	Diminui	Aumenta	Pequena Alteração	Diminui
K_I	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina
K_d	Pequena Alteração	Diminui	Diminui	Pequena Alteração

Revisão:

$$\boxed{\zeta = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(\%UP/100)]^2}}} \qquad \boxed{\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100}$$

$$\boxed{MF = tg^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}}$$

Ajuste do ganho

- Trace os Diagramas de Bode de magnitude e fase
- Determine a Margem de Fase para overshoot desejado
- Determine a frequência para esta margem de ganho
- Altere o ganho.

(Exemplo 11.1 - Nise)

Para $UP\% = 9{,}5\%$ $\quad \zeta = \frac{-\ln(0{,}095)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(0{,}095)]^2}} \quad \zeta = 0{,}6$

$$MF = tg^{-1} \frac{2 \cdot 0{,}6}{\sqrt{-2 \cdot 0{,}6^2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0{,}6^4}}} \qquad MF = 59{,}18^\circ$$

$$G(s) = \frac{100}{(s+100)} \cdot \frac{1}{(s+36)} \cdot \frac{1}{s} \qquad G(s) = \frac{100}{s(s+100)(s+36)}$$

Normalizando: $G(s) = \frac{100}{100 \times 36\, s\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{36}+1\right)}$

logo: $G(s) = \frac{(1/36)}{s\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{36}+1\right)}$

No diagrama de Bode temos:

Para $MF = 58,18° \rightarrow w = 13,9\ rad/s$ e $G = -54,7$ dB

$54,7 = 20 \log K \quad \therefore K = 543,25$

logo, função de transferência em malha aberta com o ganho ajustado:

$$\boxed{G(s) = \frac{58\,385}{s(s+36)(s+100)}}$$

Exercício de Avaliação 1.1 (Nise)

$$G(s) = \frac{K}{s(s+50)(s+120)}$$

Determine K para 20% de overshoot

$$\zeta = \frac{-\ln(0,20)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 0,20)^2}} \quad \therefore \zeta = 0,456$$

$$MF = tg^{-1} \frac{2 \cdot 0,456}{\sqrt{-2 \cdot 0,456^2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0,456^4}}} \quad \therefore MF = 43,28°$$

Para $\theta = 180 - 43,28 \rightarrow w = 30,5\ \frac{rad}{s}$ e -107 dB

$107 = 20 \log K \quad \therefore K = 223\,872$

Portanto: $\boxed{G(s) = \frac{223\,872}{s(s+36)(s+100)}}$

Compensação por atraso de fase

- Atraso de fase (LAG); (Semelhante ao PI)
- Projeta o erro de regime estacionário sem afetar a resposta transiente de forma significativa.
- Aumenta a Margem de Fase
- Reduz o ganho nas altas frequências, não altera o ganho nas baixas frequências

Exemplo 11.2 - Nise)

$$G(s) = \frac{58\,390}{s(s+36)(s+100)}$$

$$\varepsilon_{STV} = \frac{1}{K_g} \; ; \quad K_g = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{58390}{s(s+36)(s+100)} \quad \therefore K_g = 16{,}22$$

$\varepsilon_{STV} = \frac{1}{16{,}22} = 0{,}062$ Para melhoria de 10 vezes o erro, devemos multiplicar K_g por 10

$$\therefore G(s) = \frac{583\,900}{s(s+36)(s+100)}$$

Para 9,5% de overshoot, temos:

$$\zeta = \frac{-\ln(9{,}5/100)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(9{,}5/100)]^2}} \quad \therefore \zeta = 0{,}6$$

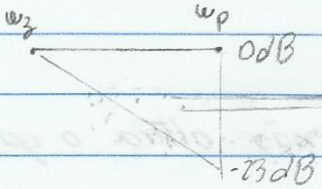
$$MF = tg^{-1} \frac{2 \times 0{,}6}{\sqrt{-2 \times 0{,}6^2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0{,}6^4}}} \quad \therefore MF = 59{,}18^\circ$$

$$\phi m = -180 + 59{,}18 + 10 \quad \therefore \phi m = -110{,}82^\circ$$

Temos $w = 10{,}1$ rad/s

$w_z = 0{,}1\, w_c \quad \therefore \quad w_z = 1{,}01$ rad/s

Para frequência $w_c = 10{,}1 \dfrac{rad}{s}$ temos $a_{dB} = 23{,}8\, dB$



$$-23{,}8 = 20 \log a \quad \therefore \quad a = 0{,}065$$

$$a = \frac{w_z}{w_p} < 1 \quad ; \quad w_1 = w_z = 0{,}065 \cdot 1{,}01$$

$$\therefore \quad w_1 = 0{,}066 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{G_c(s) = \frac{0{,}065\,(s + 1{,}01)}{(s + 0{,}066)}}$$

Exercício de Avaliação 11.2 - Nise) Projete compensador por atraso de fase para reduzir erro em 10 vezes e sobrevalor de 20%.

$$G(s) = \frac{194\,200}{s(s+50)(s+120)}$$

$$\zeta = \frac{-\ln 0{,}20}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 0{,}20)^2}} \quad \therefore \quad \zeta = 0{,}456$$

$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2 \times 0{,}456}{\sqrt{-2 \cdot 0{,}456^2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0{,}456^4}}}\right) \quad \therefore \quad MF = 48{,}15^\circ$$

$$\varepsilon_{STV} = \frac{1}{K_g} \quad ; \quad K_g = \lim_{s \to 0} s\,G(s) \quad \text{logo} \quad G(s) = 10\,G(s)$$

$$\therefore \quad G(s) = \frac{1\,942\,000}{s(s+50)(s+120)} \quad \text{Para o erro desejado}$$

$\phi = -180 + 48,15 + 10 \therefore \phi = -121,85°$

Para $\phi = -121,85°$ temos $w = 19,1$ rad/s e $a_{dB} = 23,9$

$-23,9 = 20 \log a \therefore a = 0,0638$

$w_2 = 0,1\, w = 1,91$

$w_1 = a\, w_2 = 0,122$

$$\boxed{G_c(s) = \frac{0,0638\,(s+1,91)}{(s+0,122)}}$$

Compensação por Avanço de Fase

- Aumenta a margem de fase para reduzir o sobrevalor percentual e aumentando o ganho de cruzamento para se obter uma resposta transiente mais rápida.

Exemplo 11.3 - Nise)

Projete um compensador por avanço de fase para

$UP\% = 20\%$

$K_v = 40$ $\qquad G(s) = \dfrac{100K}{s(s+36)(s+100)}$

$t_p = 0,1s$

Para $K_v = 40$, temos

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{100K}{(s+36)(s+100)} = 40 \therefore K = 1440$$

Logo $G(s) = \dfrac{144\,000}{s(s+36)(s+100)}$

Para overshoot de 20%

$$\xi = \frac{-\ln(20/100)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(20/100)]^2}} \quad \therefore \quad \xi = 0,456$$

$$MF = tg^{-1}\left(\frac{2 \cdot 0,456}{\sqrt{-2 \cdot 0,456^2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0,456^4}}}\right) \quad \therefore \quad MF = 48,15^\circ$$

(desejada)

$$\phi m = -MF_{exist} + \Delta\phi + \Delta\varphi = -34 + 48,15 + 10 \quad \therefore \quad \phi m = 24,15^\circ$$

$$a = \frac{1 + sen\,\phi m}{1 - sen\,\phi m} = \frac{1 + sen\,24,15}{1 - sen\,24,15} \quad \therefore \quad a = 2,38$$

$$a_{dB} = 20 \log 2,38 \quad \therefore \quad a_{dB} = 7,55\ dB$$

$$\text{Para } \frac{a_{dB}}{2} \rightarrow w_m = 37,8\ \frac{rad}{s}$$

$$w_2 = \frac{37,8}{\sqrt{2,38}} \quad \therefore \quad w_2 = 24,5 \qquad w_1 = a w_2 \quad \therefore \quad w_1 = 58,31\ rad/s$$

$$\boxed{G_c(s) = \frac{2,38\,(s + 24,5)}{(s + 58,31)}}$$

/ /

Exercício 2 - Nise)

Para Margem de Fase de 40°

a) $G(s) = \dfrac{K}{(s+3)(s+9)(s+15)}$

Para $K=1$, temos:

$\phi = -180 + 40 = -140°$ $\quad w_c = 8,46$ rad/s

Logo devo somar 65,6 dB

$65,6 = 20 \log K \therefore K = 1905,46$

b) $G(s) = \dfrac{K}{s(s+3)(s+9)}$

Para $K=1$, temos: $\phi = -180 + 40 = -140°$ e $w_c = 2,41$ rad/s

$F = -38,7$ logo temos que adicionar 38,7

$38,7 = 20 \log K \therefore K = 86,1$

c) $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s(s+3)(s+4)(s+5)}$

Para $MF = 40°$ temos $w_c = 2,21$ rads e -39 dB

$39 = 20 \log K \therefore K = 89,13$

Exercício 3 - Nise)

$UP\% = 20\%$ $\xi = \frac{-\ln(20/100)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(20/100)]^2}}$ $\therefore$ $\xi = 0,456$

$MF = tg^{-1}\left(\frac{2 \times 0,456}{\sqrt{-2 \cdot 0,456^2 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0,456^4}}}\right)$ $\therefore$ $MF = 48,15°$

a) $G(s) = \frac{K}{s(s+6)(s+12)}$

Para $K = 1$ e $MF = 48,15$ $\rightarrow$ $\omega_c = 3,1 \, rad/s$ e $-48,3$

$48,3 = 20 \log K$ $\therefore$ $K = 260,02$

Exercício 5 - Nise) Para $UP\% = 15\%$ temos $MF = 53,17°$

$G(s) = \frac{K}{s(s+7)}$

$E_{str} = \frac{1}{K_v}$; $K_v = \lim_{s \to 0} s G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K}{s+7} = 50$

$\therefore$ $\frac{K}{7} = 50$, logo $K = 350$

Projete compensador para o mesmo MF e ω_c

Exercício 6.)

Projete Compensador por Atraso de Fase

$$G(s) = \frac{K(s+10)(s+11)}{s(s+3)(s+6)(s+9)}$$

Para Overshoot 15% temos ME = 53,17°

$$\varepsilon_{stv} = \frac{1}{K_v} \quad ; \quad K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K(s+10)(s+11)}{(s+3)(s+6)(s+9)} = 1000$$

$\therefore K = 1472,73$

Para $K = 1472,73$ e $\phi = -180 + 53,17 + 10 = -116,83$, temos

$w_c = 1,13$ rad/s logo $w_2 = 0,1\, w_c \therefore w_2 = 0,113$ rad/s

$F = 58,2$ dB $\therefore -58,2 = 20 \log a \therefore a = 0,00123$

$a = \frac{w_2}{w_1} \therefore w_1 = 0,000139$

$$\therefore \boxed{G_c(s) = \frac{0,00123\,(s + 0,113)}{(s + 0,000139)}}$$

Exercício 7 - N(c)

Projete um compensador para 15% de overshoot. Diminuir erro a 1 quinto

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+5)(s+7)}$$

Compensador de atraso de fase

15% de overshoot $\rightarrow$ $MF = 53{,}17^\circ$

$$\varepsilon_{ST} = \frac{1}{K_g} \; ; \; K_g = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+2)(s+5)(s+7)}$$

$K_g = \frac{K}{70}$ logo $\varepsilon_{ST} = \frac{70}{K}$

Para diminuir o erro a um quinto temos que multiplicar K por 5, logo

$$G(s) = \frac{5K}{(s+2)(s+5)(s+7)}$$

Para $K=1$ temos para $MF = 53{,}17$ em $\phi = -180 + 53{,}17 + 10$

$\rightarrow \phi = -116{,}83$

$\omega_c = 3{,}46$ rads e $-31{,}6$ dB

$\omega_2 = 0{,}1\,\omega_c \;\therefore\; \omega_2 = 0{,}346$

$-31{,}6 = 20 \log a \;\therefore\; a = 0{,}026 \;;\; a = \frac{\omega_1}{\omega_2} \;\therefore\; \omega_1 = 0{,}0091$

logo $G_c(s) = \frac{0{,}026\,(s + 0{,}346)}{(s + 0{,}0091)}$

Exercício 8 - Nise)

Projete compensador por atraso de fase para

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+6)(s+8)}$$

$MF = 45°$

$K_s = 100$

$$\varepsilon = \frac{1}{K} \quad ; \quad K = \lim_{s \to 0} \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+6)(s+8)} = 100$$

$$\therefore \frac{4K}{96} = 100 \quad \therefore \quad K = 2400$$

Portanto, para $K = 2400$ e $\phi = -180 + 45 + 10 = -125$

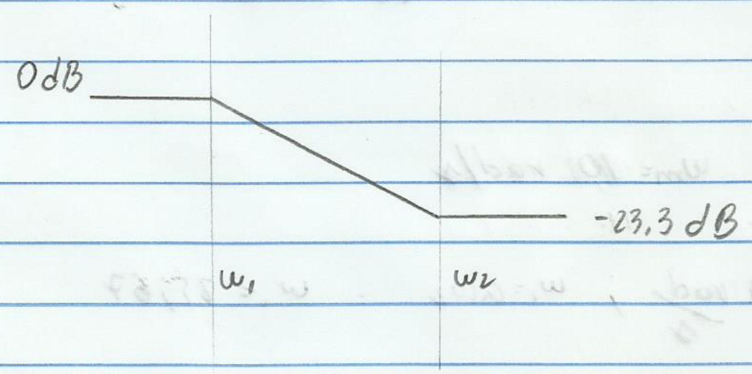
$\omega_c = 11$ rads e $a_{dB} = 23,3$ dB

$\omega_2 = 0,1\,\omega_c \therefore \omega_2 = 1,1$ rad/s

$\omega_1 = a\,\omega_2$; $-23,3 = 20 \log a \therefore a = 0,068$

e $\omega_1 = 0,075$

$$\therefore G_c(s) = \frac{0,068\,(s - 1,1)}{(s - 0,075)}$$



Exercício 13 - Nise)

Projetar Compensador por avanço de fase para $UP\% = 10\%$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+20)}$$

Não - Compensado

$UP\% = 55\%$

$t_p = 0,5s$ quando $K_v = 10$

$$E_{STV} = \frac{1}{K_V}, \quad K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+5)(s+20)} = 10$$

$\therefore K = 1000$

Não - Compensado: $UP = 55\% \rightarrow \zeta = 0,187$ e $MF = 21,16°$

Compensado: $UP\% = 10\% \rightarrow \zeta = 0,591$ e $MF = 58,59$

$$\phi = -MF_{exis} + \Delta\phi_{desejado} + \Delta\varphi = -21,16 + 58,59 + 10 \quad \therefore \phi = 47,43$$

$$a = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \quad \therefore a = 6,59 \quad a_{dB} = 16,38$$

Para $-\frac{a_{dB}}{2}$ temos $w_m = 10\ rad/s$

$$w_2 = \frac{w_m}{\sqrt{a}} \quad \therefore w_2 = 3,9\ rad/s, \quad w_1 = a w_2 \quad \therefore w_1 = 25,67$$

$$\therefore G_c(s) = \frac{0,152\,(s + 3,9)}{(s + 25,67)}$$

Revisão Controle P2

Exemplo 13.12

Determine o ajuste de ganho para $MG = 20dB$

$$G(s) = \frac{45000}{s(s+5)(s+90)}$$

A margem de ganho atual é aproximadamente nulo. Portanto devemos subtrair 20 dB.

logo devemos ter em $22{,}9\ \frac{rad}{s} \rightarrow MG = 20dB$

$$-20 = 20\log K \quad \therefore \quad \boxed{K = 0{,}1}$$

Exemplo 13.13

Projete LAG para $e_{stp} = 1/26$ $MF = 60°$

$$G(s) = \frac{K}{(s+6)(s+21)}$$

$$e_{stp} = \frac{1}{1+K_g} \ ; \ K_g = \lim_{s \to 0} G(s) \ ; \ \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+6)(s+21)} = 25$$

$$\frac{1}{1+K_g} = \frac{1}{26} \ ; \ K_g = 25 \qquad \therefore \ K = 3150$$

logo. $G(s) = \frac{3150}{(s+6)(s+21)}$ $\qquad \phi = -180 + 60 + 5 = -115$

Para $\phi = -115°$ temos $w_c = 19{,}2$ rad/s e $14{,}8$

$w_2 = 0{,}1\, w_c \ \therefore \ w_2 = 1{,}92$

$-14{,}8 = 20\log a \ \therefore \ a = 0{,}182$

$a = \frac{w_1}{w_2} \ \therefore \ w_1 = 0{,}350$

$$\boxed{\text{logo } G(s) = \frac{0{,}182(s+1{,}92)}{(s+0{,}350)}}$$

MG = 0 - M
MF = 180 + F

Exemplo 13.14)

$$G(s) = \frac{120\,000}{s(s+10)(s+60)}$$

Para o sistema não-compensado

$\omega_c = 39$ rad/s e $MF = -19°$

$\omega_c' = 24{,}5$ rad/s e $MG = -9{,}12$ dB

Como $MF < 0$ e $MG < 0$ o sistema é Instável

$\phi = -180 + 40 + 5 \therefore \phi = -135°$

Para $\phi = -135° \rightarrow \omega_c = 8{,}27$ rad/s e $25{,}3$ dB

$\omega_2 = 0{,}1\,\omega_c \therefore \omega_2 = 0{,}827$ rad/s

$-25{,}3 = 20 \log a \therefore a = 0{,}054$; $a = \frac{\omega_1}{\omega_2} \therefore \omega_1 = 0{,}045$

$$\boxed{G_c(s) = \frac{0{,}054(s + 0{,}827)}{(s + 0{,}045)}}$$

Para o sistema compensado

$\omega_c = 8{,}35$ rad/s $MF = 37°$

$\omega_c' = 24{,}7$ rad/s $MG = 16{,}4$ dB

Exemplo 13.15)

LEAD

$$A(s) = \frac{2.10^7}{s(s+10)(s+2000)}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{Kg} \quad ; \quad Kg = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{K\,2.10^7}{(s+10)(s+2000)} = 1000$$

$\therefore K = 1$ (Portanto, o erro já está ajustado)

$$\phi = 0 + 50 + 5 = 55^\circ$$

$$a = \frac{1 + \sin 55}{1 - \sin 55} \quad \therefore a = 10{,}06 \quad a_{dB} = 20{,}05\ dB$$

Para $\frac{-a_{dB}}{2} = -10{,}03$ $\quad w_m = 178\ rad/s$

$$w_2 = \frac{178}{\sqrt{10{,}06}} \quad \therefore w_2 = 56{,}12\ rad/s \quad w_1 = 564{,}57\ rad/s$$

$$\therefore G_c(s) = \frac{10{,}06\,(s + 56{,}12)}{(s + 564{,}57)}$$

Exercício 17-) LAG

$MF = 60^\circ$

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(10s+1)}$$

Normalizando $G(s) = \frac{100}{\left(\frac{s}{1}+1\right)\left(\frac{s}{0,1}+1\right)}$

Para $\phi = -180+60+5 = -115 \rightarrow w_c = 0,7 \text{ rad/s}$ e 20 rad/s

$w_2 = 0,1 w_c \therefore w_2 = 0,07 \text{ rad/s}$

$-20 = 20 \log a \therefore a = 0,1$; $a = \frac{w_1}{w_2} \therefore w_1 = 0,007 \text{ rad/s}$

$$G_c(s) = \frac{0,1(s+0,07)}{(s+0,007)}$$

Exercício 16) LEAD $MF = 30^\circ$

$$G(s) = \frac{25}{s^2}$$

$\phi = 0+30+5 = 35$

$a = \frac{1+\sin 35}{1-\sin 35} \therefore a = 3,69 \quad a_{dB} = 11,34$

Para $\frac{-a_{dB}}{2}$ $w_m = 6,7 \text{ rad/s}$

$w_2 = \frac{6,68}{\sqrt{3,69}} \therefore w_2 = 3,5 \text{ rad/s}$ $G_c(s) = \frac{3,69(s+3,5)}{(s+12,83)}$

$a = \frac{w_1}{w_2} \therefore w_1 = 12,83$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+7)} \qquad K_v = 50$$

Operando com 15% $\rightarrow \zeta = 0{,}517 \rightarrow MF = 53{,}17^\circ$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+7)} = 50 \quad \therefore \quad K = 350 \quad \therefore \quad G(s) = \frac{350}{s(s+7)}$$

Para $\phi = 53{,}17 - 180 = -126{,}83$ temos $a = 17{,}9\ dB$

$$-17{,}9 = 20 \log a \quad \therefore \quad a = 0{,}127$$

$$G(s) = \frac{44{,}57}{s(s+7)}$$

— // —

$$G(s) = \frac{K(s+10)(s+11)}{s(s+3)(s+6)(s+9)}$$

LAG
$K_v = 1000$
15%

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{K(s+10)(s+11)}{(s+3)(s+6)(s+9)} = 1000 \quad \therefore \quad K = 16200/11$$

Para $UP\% = 15\% \rightarrow \zeta = 0{,}517 \rightarrow MF = 53{,}17^\circ$

$\phi = -180 + 53{,}17 + 10 \quad \therefore \quad \phi = -116{,}83 \rightarrow w_c = 1{,}13\ rad/s$ e $58{,}2\ dB$

$w_2 = 0{,}1\, w_c \quad \therefore \quad w_2 = 0{,}113\ rad/s$

$-58{,}2 = 20 \log a \quad \therefore \quad a = 0{,}00123 \qquad a = \frac{w_1}{w_2} \quad \therefore \quad w_1 = 0{,}000139$

$$G_c(s) = \frac{0{,}00123\,(s + 0{,}113)}{(s + 0{,}000139)}$$

Atraso de Fase (LAG)

Exemplo 13.13 Projeto compensador de Atraso de fase para fazer com que $e_{sep} = 1/26$ e $MF = 60°$

$$G(s) = \frac{K}{(s+6)(s+21)}$$

Lembrando que:

Sistema \ Erro	Posição	Velocidade	Aceleração
0	$\frac{r_0}{1+K_g}$	∞	∞
1	0	$\frac{V_0}{K_g}$	∞
2	0	0	$\frac{a_0}{K_g}$

$$e_{sep} = \frac{1}{1+K_g} = \frac{1}{26} \therefore K_g = 25$$

$$K_g = \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+6)(s+21)} = 25$$

$$= \frac{K}{6 \times 21} = 25 \therefore K = 3150$$

Portanto, temos: $G(s) = \frac{3150}{(s+6)(s+21)}$

Frequência $\bar{\omega}_c = -180 + MF + \Delta\varphi$

Para o sistema sem compensador temos $\omega_c = 54 \text{ rad/s}$ e $MF = 28°$

Nova frequência $\bar{\omega}_c \Rightarrow -180 + 60 + (5° \text{ a } 12°)$ Para 5° $\phi = -115$

Para $\angle -115 \Rightarrow \bar{\omega}_c = 19{,}2 \text{ rad/s}$ e $14{,}8 \text{ dB}$

$\omega_2 = 0{,}1\,\bar{\omega}_c$

$\omega_2 = 0{,}1 \times 19{,}2$

$\omega_2 = 1{,}92 \text{ rad/s}$

$$G_c = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

$$a = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad e \quad T = \frac{1}{\omega_1}$$

$a(dB) = 20 \log(a) = 20 \log\left(\frac{w_1}{w_2}\right) \quad ; \quad a = \frac{w_1}{w_2}$

Através do gráfico, temos $a(dB) = -14{,}8$

$\therefore -14{,}9 = 20 \log\left(\frac{w_1}{w_2}\right) \quad \therefore \quad \frac{w_1}{w_2} = 0{,}180$

Para $w_2 = 1{,}92$ logo $w_1 = 0{,}35$ rad/s

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{w_2}}{1 + \frac{s}{w_1}} = \frac{\frac{w_2 + s}{w_2}}{\frac{w_1 + s}{w_1}} = \frac{w_1}{w_2} \times \frac{w_2 + s}{w_1 + s} = a\,\frac{(w_2 + s)}{(w_1 + s)}$$

$$\therefore G_c(s) = 0{,}180\,\frac{(1{,}92 + s)}{(0{,}35 + s)}$$

O sistema compensado será

$$G(s)\,G_c(s) = \frac{567(s + 1{,}92)}{(s+6)(s+2)(s+0{,}35)}$$