Cálculo Numérico

- Sistemas lineares
- Zero de Função
- Ajuste de curvas
- Interpolação
- Integração Numérica
- Equações diferenciais

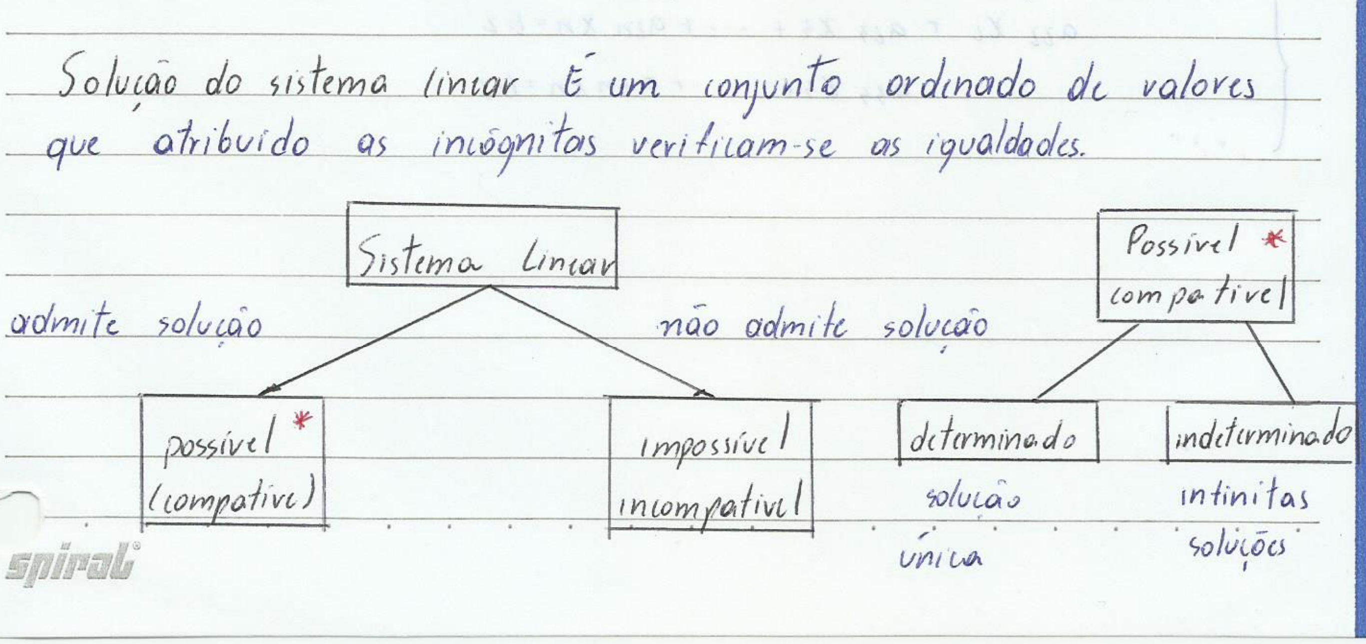
Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} = bm \end{cases}$$

Com $\begin{cases} a_{ij}, b_i \text{ para } i = 1, \dots m \text{ e } j = 1, \dots n \text{ são nº reais} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \text{ são nºs reais a serem determinados (incógnitas)} \end{cases}$

é um sitema linear de m equações a n incógnitas

Solução do sistema linear é um conjunto ordinado de valores que atribuido as incógnitas verificam-se as igualdades.



Nota:

Se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ então o sistema linear é dito homogênio. Tais sistemas sempre têm solução

A solução trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ é solução dos sistemas homogênios.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas S_1 e S_2 são equivalentes se possuem o mesmo conjunto solução.

Neste caso, S_1 pode ser obtido a partir de S_2, através de operações elementares:

-> permuta de equações

-> multiplicar uma equação por um valor não nulo

-> Somar (Subtrair), termo a termo, equações

Sistemas Triangularizados (ou Escalonados)

Dizemos que o sistema esta na forma triangularizada se $a_{ij} = 0$ para $i > j$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \qquad a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33} x_3 + \cdots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \ldots \end{cases}$$

Método da Triangularização de Gaus

Consiste em obter um sistema equivalente escalonado (triangularizado)
Resolver o sistema triangularizado.
Considere o sistema linear:

$$\begin{matrix} a_{21} \\ a_{11} \\ \\ \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right.$$

Zerar a_{21}

$$a_{21}a_{11}x + a_{21}a_{12}y + a_{21}a_{13}z = a_{21}b_1 \quad (*)$$
$$a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y + a_{11}a_{23}z = a_{11}b_2 \quad (**)$$

Fazendo $(**) - (*)$

$$\cancelto{0}{(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11})}x + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})z = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{a}_{22}y + \tilde{a}_{23}z = \tilde{b}_2$$

Sistema equivalente:

$$\begin{matrix} a_{31} \\ \\ a_{11} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad\quad \tilde{a}_{22}y + \tilde{a}_{23}z = \tilde{b}_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right.$$

Para zerar a_{31}:

Procedendo de forma semelhante obtemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{a}_{32}y + \tilde{a}_{33}z = \tilde{b}_3$$

Sistema equivalente

$$\begin{array}{l} \\ \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{22} \end{array} \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad \tilde{a}_{22}y + \tilde{a}_{23}z = \tilde{b}_2 \\ \qquad \tilde{a}_{32}y + \tilde{a}_{33}z = \tilde{b}_3 \end{cases}$$

Para zerar $\tilde{a}_{32}$

Procedendo de forma semelhante:

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{22} & \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{32} & \tilde{b}_3 \end{vmatrix}$$

$$\hat{a}_{33}z = \hat{b}_3$$

Sistema Equivalente Escalonado (S.E.E)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad \tilde{a}_{22}y + \tilde{a}_{23}z = \tilde{b}_2 \\ \qquad\qquad \hat{a}_{33}z = \hat{b}_3 \end{cases}$$

→ Se $\hat{a}_{33} \neq 0$, o sistema é possível e determinado

→ Se $\hat{a}_{33} = 0$ e $\begin{cases} \hat{b}_3 = 0, \text{ o sistema é possível e indeterminado} \\ \hat{b}_3 \neq 0, \text{ o sistema é impossível} \end{cases}$

<u>Obs.</u>: O método pode ser aplicado para sistemas lineares de qualquer ordem:

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Para zerar a_{21}

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(-2-6)y + (1-3)z = (2-12)$$

$$\underbrace{-8y - 2z = -10}$$

↳ 2ª equação

Para zerar a_{31}

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(3-8)y + (-2-4)z = (5-16)$$

$$\underbrace{-5y - 6z = -11}$$

↳ 3ª equação

Sistema Equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ \quad - 8y - 2z = -10 \\ \quad - 5y - 6z = -11 \end{cases}$$

Para zerar a_{32}

$$\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ -5 & -11 \end{vmatrix}$$

$$(48 - 10)\, z = (88 - 50)$$

$$38z = 38$$

S. E. E

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ \quad -8y - 2z = -10 \\ \qquad 38z = 38 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado

$$z = \frac{38}{38} = 1 \qquad -8y - 2 = -10 \qquad x = 4 - 2 - 1$$

$$y = \frac{-8}{-8} = 1 \qquad x = 1$$

Solução $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

Dispositivo Prático

x	y	z	
1	2	1	4
3	-2	1	2
4	3	-2	5
	-8	-2	-10
	-5	-6	-11
		38	38

Exercícios:

Resolva utilizando o método de triangularizado de Gaus

1) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 6,5 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + z - z = 0 \end{cases}$

x	y	z	
3	-1	2	6,5
3	-1	-1	-1
1	1	-1	0
	0	-9	-22,5
	4	-5	-6,5
	4	-5	-6,5
	0	-9	-22,5
		$\boxed{-36}$	-90
		≠0	

S.E.G

$\begin{cases} 3x - y + 2z = 6,5 \\ 4y - 5z = -6,5 \\ -9z = -22,5 \end{cases}$

ou

$\begin{cases} 3x - y + 2z = 6,5 \\ 4y - 5z = -6,5 \\ -36z = -90 \end{cases}$

$z = 2,5 \quad y = 1,5 \quad x = 1$

$(x, y, z) = (1; 1,5; 2,5)$

2) $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$

x	y	z	
2	1	-1	4
1	-1	1	2
1	2	-2	1
	-3	3	0
	3	-3	-2
		0	6

$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0z = 6 \end{cases}$

S.I

3) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$

x	y	z	
1	2	1	4
3	-2	1	2
5	2	+3	10
	-8	-2	-10
	-8	-2	-10
		0	0

S.E.E

$x + 2y + z = 4$

$-8y - 2z = -10$

$0z = 0$

$(\forall z \in \mathbb{R})$

s.p.i

$y = \frac{2z-10}{8} = \frac{z-5}{4}$ $\quad x + \frac{5-z}{2} + z = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4 - z + \frac{z}{2} - \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{3-z}{2}$

$(x, y, z) = \left(\frac{3-z}{2}, \frac{z-5}{4}, z\right)$

4-) $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ x + 3y + z + 7t = -1 \end{cases}$

x	y	z	t		
1	1	-1	-1	0	–
1	1	1	3	2	
2	-1	-1	-1	0	
1	3	1	7	-1	
	0	2	4	2	
	-3	1	1	0	–
	2	2	8	-1	
	-3	1	1	0	
	0	2	4	2	
	2	2	8	-1	
		2	4	2	–
		-8	-26	3	
			-20	22	-

$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ -3y + z + t = 0 \\ 2z + 4t = 2 \\ -20t = 22 \end{cases}$

$(x, y, z, t) = (1.4, 0.7, 3.2, -1.1$

3	1	3
5	3	1
1	-4	7
	4	-12
	-13	16

SI

6) $\begin{cases} 7x^2 - 4y - 2z = 1 \\ -2x^2 + 7y - 4z = 1 \\ -4x^2 - 2y + 7z = 1 \end{cases}$

$t = x^2$

$\begin{cases} 7t - 4y - 2z = 1 \\ -2t + 7y - 4z = 1 \\ -4t - 2y + 7z = 1 \end{cases}$

7	-4	-2	1
-2	7	-4	1
-4	-2	7	1
	41	-32	9
	-30	41	11
		721	721

SEE.

$\begin{cases} 7t - 4y - 2z = 1 \\ 41y - 32z = 9 \\ 721z = 721 \end{cases}$

$z = 1 \quad y = 1 \quad t = 1$

Sistema linearizado é p.d

Como $x^2 = t$ temos $x^2 = 1 = x \pm 1$

Solução do sistema não linear

$(-1,1,1)$ e $(1,1,1)$

2) Atribuia valores quaisquer para as variáveis x, y, z

Atribuindo x_0, y_0, z_0, respectivamente, temos uma aproximação inicial para a solução do sistema

3) A partir da solução inicial usar as equações dadas em ⊛, interativamente, e obter novas aproximações para a solução do sistema

4) Critério de parada:

$$\max : \{ |x^{k+1} - x^k|, |y^{k+1} - y^k|, |z^{k+1} - z^k| \} \leq \varepsilon$$

onde ε é a precisão desejada

Obs.: O método pode ser aplicado para sistemas lineares de qualquer ordem

Obs.: É possivel provar que se os maiores coeficientes, em valor absoluto, estiverem na diagonal principal da matriz dos coeficientes, o método converge.

Exemplo:

Resolva o sistema usando o método de Gauss-Seidel com $\varepsilon = 0{,}05$

$$\begin{cases} x + y - 5z = 4 \\ x - 10y - z = 2 \\ 5x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y + z = 1 & \div 5 \\ x - 10y - z = 2 & \div -10 \\ x + y - 5z = 4 & \div -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 0{,}2y + 0{,}2z = 0{,}2 \\ -0{,}1x + y + 0{,}1z = -0{,}2 \\ -0{,}2x - 0{,}2y + z = -0{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}2 - 0{,}2y - 0{,}2z \\ y = -0{,}2 + 0{,}1x - 0{,}1z \\ z = -0{,}8 + 0{,}2x + 0{,}2y \end{cases}$$

Admitindo como solução aproximada inicial

$(x, y, z) = (0{,}2;\ -0{,}2,\ -0{,}8)$

	x	y	z	Critério de parada
0	0,2	-0,2	-0,8	$\max\{\lvert 0{,}4-0{,}2\rvert, \lvert -0{,}08+0{,}2\rvert, \lvert 0{,}736+0{,}8\rvert$ $= 0{,}2 > \varepsilon$
1	0,4	-0,08	-0,736	
2	0,363	-0,09	-0,745	$\max\{\lvert 0{,}363-0{,}4\rvert, \lvert -0{,}09+0{,}08\rvert,$ $\lvert -0{,}745+0{,}736\rvert = 0{,}04 < \varepsilon$

Se $\tilde{a}_{33} \neq 0$, o sistema é possível e determinado $\quad \tilde{a}_{33} \mid \tilde{b}_3$

Se $\tilde{a}_{33} = 0$ e $\begin{cases} \tilde{b}_3 \neq 0 \text{ , o sistema é imposível} \\ b_3 = 0 \text{ , o sistema é possível e indeterminado} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y + az = a \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + ay + 2z = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & a & & a \\ 1 & 2 & 3 & & 2 \\ 1 & a & 2 & & -1 \\ \hline & 5 & (6-a) & & (4-a) \\ & (2a+1) & (4-a) & & (-2-a) \\ \hline & & 2a^2-16a+14 & & 2a^2-12a-14 \end{array}$$

S P D

$2a^2 - 16a + 14 = 0$

$a^2 - 8a + 7 = 0 \qquad a_1 = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$a = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2}$

$a_2 = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

* Para que o sistema seja possível e determindo $a \neq 7$ e $a \neq 1$

ou

s.p.d se $a \in \mathbb{R} - \{1, 7\}$ ou $a \in \mathbb{R} \mid a \neq 1$ e $a \neq 7 \mid$

S P. I

$2a^2 - 16a + 14 = 0$ e $2a^2 - 12a - 14 = 0$

$a = 7 \quad a = 1 \qquad a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow (a-7)(a+1)$

$a = 7$ e $a = -1$

Para que o sistema seja possível e indeterminado $a = 7$

sp i se $a \in \mathbb{R} \{7\}$ ou $a \in \mathbb{R} / a = 7$

/ /

- S I

$a^2 - 8a + 7 = 0$ e $a^2 - 6a - 7 \neq 0$

$a = 7$ e $a = 1$ $a \neq 7$ $a \neq -1$

SI x $a \in \mathbb{R} \{1\}$ ou $\{a \in \mathbb{R} \mid a = 1\}$

Método de Gaus Seidel

→ método interativo:

obtém uma aproximação para a solução do sistema a partir de uma solução inicial (qualquer).

A aproximação da solução é obtida com a precisão ε desejada

→ esforço computacional é inferior ao do método da triangularização de Gauss.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = b_1 \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = b_2 \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = b_3 \end{cases}$$

com $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$

O método de Gauss-Seidel consiste em:

1) $$\left. \begin{array}{ll} x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} y - \frac{a_{13}}{a_{11}} z & z = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x - \frac{a_{32}}{a_{33}} y \\ y = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x - \frac{a_{23} z}{a_{22}} & \end{array} \right)$$

eq. de Gauss-Seidel *

Critérios de convergência

Antes de aplicar um método interativo é conveniente verificar a convergência.

I- Critério da Soma por linhas

$$\begin{cases} a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z = b_1 \\ a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z = b_2 \\ a_{31} X * a_{32} Y + a_{33} Z = b_3 \end{cases}$$

Se

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| < 1$$

então as sequências $\{X_m\}, \{Y_m\}, \{Z_m\}$ convergem para X^*, Y^*, Z^*, onde (X^*, Y^*, Z^*) é a solução do sistema.

Obs: Se uma das condições não se verificar, o sistema pode convergir ou não. Portanto, nada podemos afirmar sobre a convergência

Exemplo:

Verifique se é possível garantir convergência, utilizando o critério da soma por linhas.

$$\begin{cases} 3x + 3y - 5z = 2 \\ 10x + 3y + 2z = -20 \\ 2x + 5y - 3z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x + 3y + 2z = -20. \\ 2x + 5y - 3z = 10 \\ 3x + 3y - 5z = 2 \end{cases}$$

Sistema é convergente

$$\left|\frac{3}{10}\right| + \left|\frac{2}{10}\right| = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\left|\frac{2}{5}\right| + \left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{5}{5} = 1$$ (não foi satisfeita)

- Nada podemos afirmar sobre a convergência por este critério.

Critério de Sassenfeld

Considere o sistema de ordem 3

Se

$$\beta_1 = \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| \cdot \beta_1 + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| < 1$$

$$\beta_3 = \left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| \cdot \beta_1 + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| \cdot \beta_2 < 1$$

então as sequências $\{X_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ convergem para a solução do sistema.

Obs: * Se uma das condições não se verificar nada podemos afirmar sobre a convergência

* Os critérios de convergência podem ser aplicados para sistemas de qualquer ordem.

Exemplo:

Verifique se é possível assegurar a convergência para o sistema abaixo. Se sim, aplique o metodo iterativo de Gauss Seidel para obter uma solução aproximada do sistema, com $\varepsilon = 0{,}5$

$$\begin{cases} 3x + 12y + 6z = -10 \\ 10x + 2y + 2z = 8 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x + 2y + 2z = 8 \\ 3x + 12y + 6z = -10 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

Não é possível

$$\beta_1 = \left|\frac{2}{10}\right| + \left|\frac{2}{10}\right| = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} < 1$$

O sistema é convergente

$$\beta_2 = \left|\frac{3}{12}\right| \cdot \frac{2}{5} + \left|\frac{6}{12}\right| = \frac{3}{5} < 1$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{-2}\right| \cdot \frac{2}{5} + \left|\frac{1}{-2}\right| \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{5}{10} < 1$$

Método Gauss Seidel

$$\begin{cases} x + 0{,}2y + 0{,}2z = 0{,}8 \\ 0{,}25x + y + 0{,}5z = -0{,}83 \\ -0{,}5x - 0{,}5y + z = 1{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0{,}8 - 0{,}2y - 0{,}2z \quad (0{,}8 - 0{,}2(y+z)) \\ y = -0{,}83 - 0{,}25x - 0{,}5z \quad (-0{,}83 - 0{,}25(x+2z) \\ z = 1{,}5 + 0{,}5x + 0{,}5y \quad (1{,}5 + 0{,}5(x+y) \end{cases}$$

Interação	x	y	z	CP
0	0,8	−0,83	1,5	$\max\{\|0{,}67-0{,}8\|, \|-1{,}75+0{,}83\|, \|0{,}96-1{,}5\|\}$
1	0,67	−1,75	0,96	$= \max\{0{,}13 ; 0{,}92 ; 0{,}54\}$ $0{,}92 > \varepsilon$
2	0,96	−1,55	1,205	$\max\{\|0{,}96-0{,}67\|, \|-1{,}55+1{,}75\|, \|1{,}205-0{,}96\|\}$ $\max = \{0{,}29 ; 0{,}2 ; 0{,}25\}$ $0{,}29 < \varepsilon$.

Solução aproximada $(0{,}96 ; -1{,}55 ; 1{,}21)$

Exercícios:

1) Para que valores de m podemos assegurar a convergencia do sistema pelo método interativo?

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 4y + mz = 2 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{1}{24}\right| \cdot \frac{2}{3} + \left|\frac{m}{4}\right| = \frac{1}{6} + \frac{|m|}{4} = \frac{2+3|m|}{12} < 1$$

$$\triangleright \quad 2 + 3|m| < 12 \Rightarrow |m| < \frac{10}{3} \Rightarrow -\frac{10}{3} < m < \frac{10}{3}$$

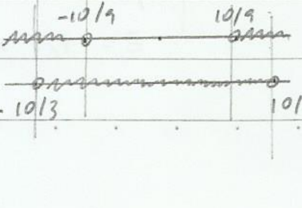
$$\beta_3 = \left|\frac{1}{m}\right| \frac{2}{3} + \left|\frac{1}{m}\right| \frac{2+3|m|}{12} = \frac{2}{3|m|} + \frac{2+3|m|}{12|m|} < 1$$

$$\frac{8+2+3|m|}{12|m|} < 1 \Rightarrow \frac{10+3|m|}{12|m|} < 1 \qquad 10 + 3|m| < 12|m|$$

$$10 < 12|m| - 3|m|$$

$$10 < 9|m|$$

$$|m| > \frac{10}{9} \begin{cases} m > 10/9 \\ m < -10/9 \end{cases}$$



$m \in \,]-10/3, -10/9[\, \cup$

$]10/9[\, \cup \,]10/3[$

45) Representa graficamente os pontos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ com $a>0$ e $b>0$, para que o sistema tenha solução pelo método interativo.

$$\begin{cases} 8x - y + z = 4 \\ 2x + 10y + az = 5 \\ bx + y + az = 6 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{-1}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < 1$$

$$|a| < \frac{19}{2} \Rightarrow -\frac{19}{2} < a < \frac{19}{2}$$

$$\beta_2 = \left|\frac{\cancel{2}1}{10}\right| \frac{1}{\cancel{4}2} + \left|\frac{a}{10}\right| = \frac{1}{20} + \frac{|a|}{10} = \frac{1+2|a|}{20} < 1$$

$$\boxed{0 < a < \frac{19}{2}}$$

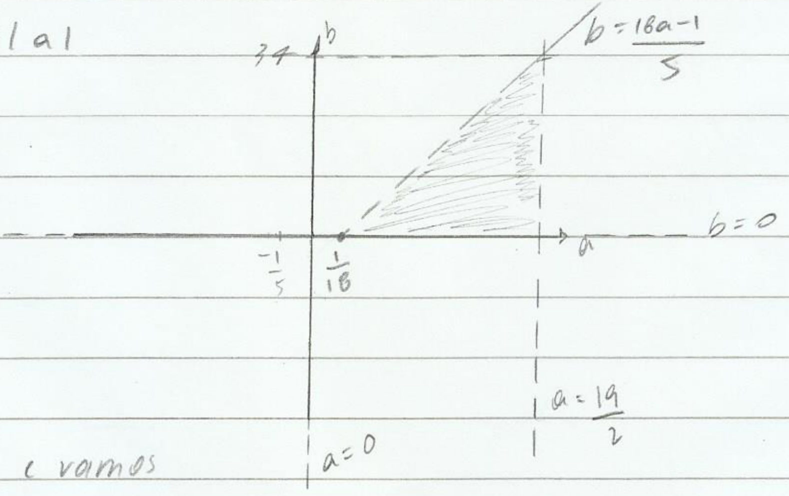
$$\beta_3 = \left|\frac{b}{a}\right| \frac{1}{4} + \left|\frac{1}{a}\right| \frac{1+2|a|}{20} = \frac{|b|}{4|a|} + \frac{1+2|a|}{20a} = \frac{5|b|+1+2|a|}{20|a|} < 1$$

$$5|b| + 1 + 2|a| < 20|a|$$

$$5|b| - 18|a| < -1$$

$$|b| < \frac{-1+18|a|}{5}$$

$$0 < b < \frac{18a-1}{5}$$



Tomemos $(a,b) = (0,34)$ e vamos verificar se o ponto satisfaz

$$b < \frac{18a-1}{5}$$

$$34 < \frac{18(0)-1}{5}$$

$$34 < -\frac{1}{5} \quad (F)$$

Ajuste de Curvas não linear nos Parâmetros

No método dos mínimos quadrados a curva de ajuste $g(x)$ é uma combinação linear de $g_i(x)$, com $i=0,1,2,\dots,n$

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

Quando isso não acontece é necessário efetuar uma transformação nos dados.

O método do alinhamento consiste em efetuar operações algébricas para transformar $y=g(x)$ em

$Y = AX+B$ (ou equivalente $Y = A+BX$)

Para verificar se temos um "bom ajuste" basta observar se os pontos (X,Y) estão alinhados

Exemplo:

Ajustar os dados da tabela abaixo por uma curva de uma das famílias $y=ab^x$ ou $y=\frac{x}{a+bx}$

x	1	2	3	4
$f(x)=y$	0,750	1,125	1,688	2,531

a) $y=ab^x$

$\ln y = \ln(ab^x)$

$\ln y = \ln a + \ln b^x$

$\ln y = \ln a + x \ln b$

$Y = A + BX$

Onde:

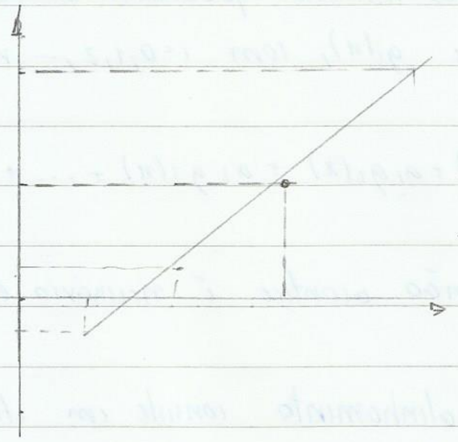
$Y = \ln y$

$A = \ln A$

$B = \ln B$

$X = x$

X	1	2	3	4
Y	-0,288	0,118	0,524	0,929



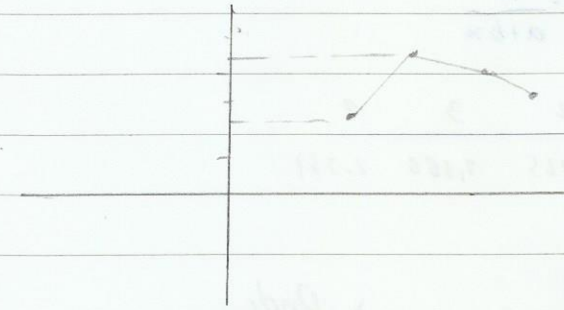
b) $y = \dfrac{x}{a+bx}$

$\dfrac{1}{y} = \dfrac{a+bx}{x}$

$\dfrac{x}{y} = a+bx \sim Y = A+BX$

Onde: $\begin{cases} Y = x/y \\ A = a \\ B = b \\ X = x \end{cases}$

X	1	2	3	4
Y	1,333	1,778	1,777	1,580



Melhor alinhamento obtido foi com $y=a.b^x$

m. m. Q

X	$g_0 = 1$	$g_1 = x$	Y
1	1	1	-0,288
2	1	2	0,118
3	1	3	0,524
4	1	4	0,929
S.E.N	4	10	1,283
	10	30	5,238
		20	8,102

SEN escalonado

$$\begin{cases} 4A + 10B = 1,283 \\ \quad\quad 20B = 8,102 \end{cases} \quad \therefore B = 0,405$$

$$A = \frac{1,283 - 10(0,405)}{4} = -0,692$$

$$\therefore Y = -0,692 + 0,405X$$

Como $A = \ln a$ temos $a = e^A$

$a = e^{-0,692} = 0,5$

Como $B = \ln b$ temos $b = e^B$

$b = e^{0,405} \Rightarrow b = 1,499$

Curva de ajuste

$y = ab^x$

$\underline{y = (0,5)(1,499)^x}$

2) Determinar qual das familias ajusta melhor os dados da tabela. Ache o ajuste

$y = a + \frac{b}{x}$ ou $y = a x^b$

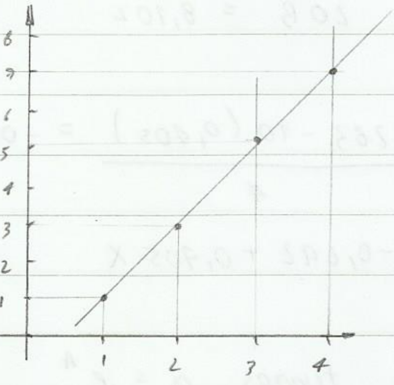
x	1	2	3	4
$f(x)$	1,00	1,50	1,67	1,75

a) $y = a + \frac{b}{x}$ ~ $yx = ax + b$ Onde $Y = yx$

$Y = AX + B$

$A = a$; $X = x$; $B = b$

X	1	2	3	4
Y	1,00	3,00	5,01	7



b) $y = a x^b$

$\ln y = \ln(a x^b)$

$\ln y = \ln a + \ln x^b$

$\ln y = \ln a + b \ln x$

$Y = A + BX$

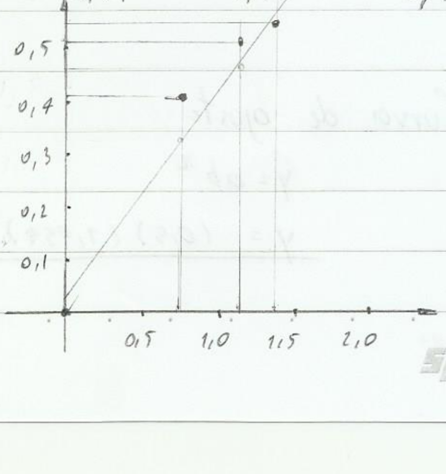
Onde: $Y = \ln y$

$A = \ln a$

$B = b$

$X = \ln X$

X	0	0,69	1,10	1,39
Y	0	0,41	0,51	0,56



"O melhor alinhamento foi encontrado no $y = a + \frac{b}{x}$

x	$g_0 = 1$	$g_1 = x$	Y
1	1	1	1
0,5	1	0,5	1,5
0,33	1	0,33	1,67
0,25	1	0,25	1,75
S.E.N	4	2,08	5,92
	2,08	1,42	2,74
		1,36	-1,35

$$\begin{cases} 4A + 2{,}08B = 5{,}92 \\ 1{,}36B = -1{,}35 \end{cases} \qquad \begin{matrix} B = -1 \\ A = 2 \end{matrix}$$

1) Qual das famílias ajusta melhor os dados da tabela

x	1	2	3	4
$f(x)$	6,61	7,89	9,96	10,69

$y = \dfrac{ax}{a^2 + bx}$ $\qquad$ $y = ae^{bx}$

2) Ajustar os dados por 1 polinômio do 2º grau

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-14,5	-12,7	8,3	13,5	14,5

3) Fazer a análise hormônica, se possível. Usar 2 decimais

x	1	3	5
$f(x)$	1,10	2,40	1,60

4.) Determinar, usando o met. de Loguerre um intervalo que contem a solução do problema:

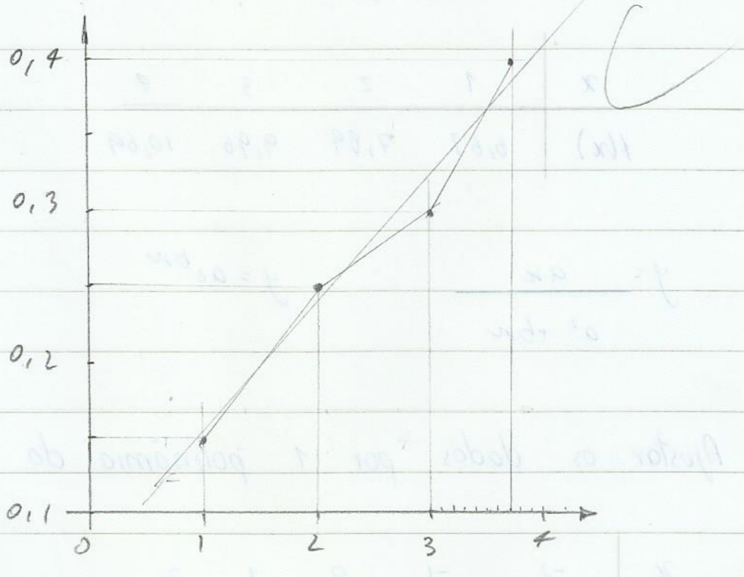
"Determinar um dos pontos da curva $y = x^4 - 6x^2 + 5x + 1$, onde a reta tangente tem inclinação $k = 45°$".

1-) $y = \frac{ax}{a^2 + bx} \Rightarrow y(a^2 + bx) = ax$

$\frac{ax}{y} = a^2 + bx \therefore \frac{x}{y} = a + \frac{b}{a} x$

$Y = A + BX$; $Y = x/y$ $A = a$ $B = b/a$ $X = x$

X	1	2	3	4
Y	0,151	0,253	0,301	0,374



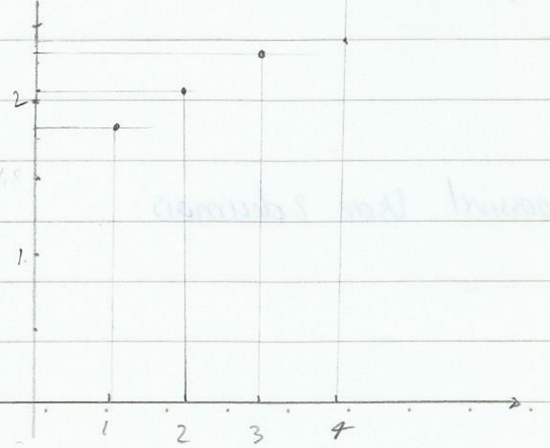
$y = a e^{bx}$

$ly = \ln a + bx$

$Y = A + BX$

$Y = \ln y$ $A = \ln A$ $B = b$ $X = x$

X	1	2	3	4
Y	1,889	2,06	2,30	2,37



2)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-14,5	-12,7	8,3	13,5	14,5

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

x	$a_0 = 1$	$a_1 = x$	$a_2 = x^2$	$f(x)$
-2	1	-2	4	-14,5
-1	1	-1	1	-12,7
0	1	0	0	8,3
1	1	1	1	13,5
2	1	2	4	14,5
	5	0	10	9,1
	0	10	0	84,2
	10	-0	34	0,8
		50	0	921
		0	70	-87
			3500	-4350

$5a_0 + 10a_2 = 9,1$

$10a_1 = 84,2$

$70a_2 = -87$

$a_2 = -1,24$

$a_1 = 8,42$

$a_0 = 4,3$

$y = 4,3 + 8,42 . x - 1,24 x^2$

3)

	x	$f(x)$
0	1	1,10
$2\pi/3$	3	2,40
$4\pi/3$	5	1,60

$\boxed{t = ax + b}$

$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$

$y = 1,7 - 0,6 \cos x + 2,31 \operatorname{sen} x$

onde $t = \frac{\pi}{3}(x-1)$

t	1	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$f(x)$
0	1	1	0	1,10
$2\pi/3$	1	-0,5	$\sqrt{3}/2$	2,40
$4\pi/3$	1	-0,5	$-\sqrt{3}/2$	1,60
	3	0	0	5,1
	0	1,5	0	-0,9
	0	0	1,5	3,46
		4,5	0	-2,7
		0	4,5	10,38

$1 \quad 0 = a + b$

$- = 3a + b$

$\therefore a = \pi/3$

$b = -\frac{\pi}{3}$

1) Determine o valor de $\underline{\underline{a}}$ para que o sistema linear seja possível e determinado

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

2) Sabe-se que o deslocamento de uma partícula é regido pela função dada por

$$S(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + 3t^2 - 4t + 10$$

Determine o instante a partir de $t=0$ em que a partícula alcança a velocidade de 11 m/s $t = 2{,}70\,s$

3) Aproximar a função f, dada pela tabela abaixo, por uma curva da família $y = \sqrt{a + bx}$ usando o método dos mínimos quadrado.

x	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	2,1	3,2	4,4	5,8

4) Dois corredores saem simultaneamente, de 2 pontos distantes 160 km com o objetivo de encontrar-se. Os 2 correm segundo as equações $X(t) = 110 - 80\,e^{-t/2}$ e $X_2(t) = 30t$, respectivamente. Depois de quanto tempo eles se encontram? Usar Newton Raphons

$t = 2{,}45$

/ /

5) Representar graficamente a região do plano cujos pontos (a,b) garantem a convergência do sistema pelo método de Gauss-Seidel. Considere a>0 e b>0

$$\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + az = 5 \\ bx + y + az = 12 \end{cases}$$

1)

1	2	-3	4
3	-1	5	2
4	1	a^2-14	$a+2$
	-7	14	-10
	-7	a^2-2	$a-6$
		$-7a^2+112$	$-7a-28$

$-7a - 28 \neq 0$

$\therefore a = 4$ e

$-7a^2 + 112 \neq 0$

$a = \pm 4$

$\therefore a \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

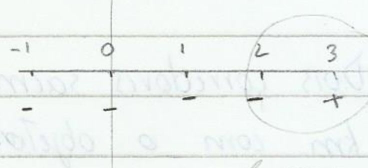
2-) $V(t) = \frac{dS(t)}{dt} = t^3 - 3t^2 + 6t - 4 = 11$

$\therefore P(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 15 = 0$

$P(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 15$

	1	-3	6	-15
1	1	-2		
2	1	-1		
3	1	0	6	3

$L = 3$



$-P(-t) = t^3 + 3t^2 + 6t - 15$

	1	3	6	+15
1	1	3	9	24

$L' = -1$

$$x_{k+1} = x_0 - \left(\frac{t^3 - 3t^2 + 6t - 15}{3t^2 - 6t + 6} \right)$$

$x_0 = 2$

$\therefore x = \underline{2{,}78\ m}$

3) $y = \sqrt{a+bx}$ $y^2 = a+bx$

x	1	x	f(x)
1,5	1	1,5	4,41
2	1	2	10,24
2,5	1	2,5	19,36
3	1	3	33,64
	4	9	67,65
	9	21,5	176,415
		5	96,81

$$\begin{cases} 4a + 9b = 67,65 \\ 5b = 96,81 \end{cases}$$

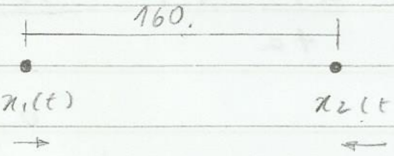
$b = 19,362$

$a = -26,652$.

$y = \sqrt{-26,652 + 19,362x}$

4-) $X_1(t) = 110 - 80\,e^{-t/2}$

$X_2(t) = 30t$



$X_1(t) = 160 - X_2(t)$

$X_1(t) = 160 - 30t$ $\therefore$ $110 - 80\,e^{-t/2} = 160 - 30t$

$-80\,e^{-t/2} = 50 - 30t$

$f(t) = -80\,e^{-t/2} + 30t - 50$

$f(0) < 0$

$f(1) < 0$

$f(2) < 0$

$f(3) > 0$

$x_{k+1} = x_0 - \left(\dfrac{-80\,e^{-t/2} + 30t - 50}{40\,e^{-t/2} + 30} \right)$

$x_0 = 2$

$x_1 = 2,45$

$\therefore$ $t = 2,45$

$a < 3$ e $a > 0$

5-) $\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + az = 5 \\ bx + y + az = 12 \end{cases}$

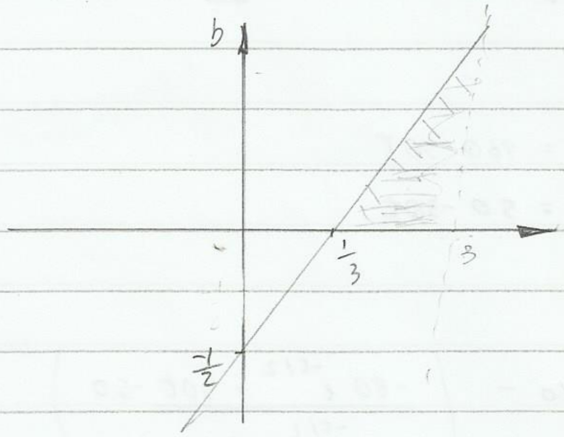
$$\beta_1 = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{4}\right| \cdot \frac{1}{2} + \left|\frac{a}{4}\right| = \frac{a+1}{4} < 1 \qquad a < +3$$

$$\beta_3 = \left|\frac{b}{a}\right| \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{a}\right| \frac{a+1}{4} < 1$$

$$\frac{b}{2a} + \frac{a+1}{4a} < 1 \qquad \frac{2b + a + 1}{4a} < 1$$

$$b < \frac{3a - 1}{2}$$



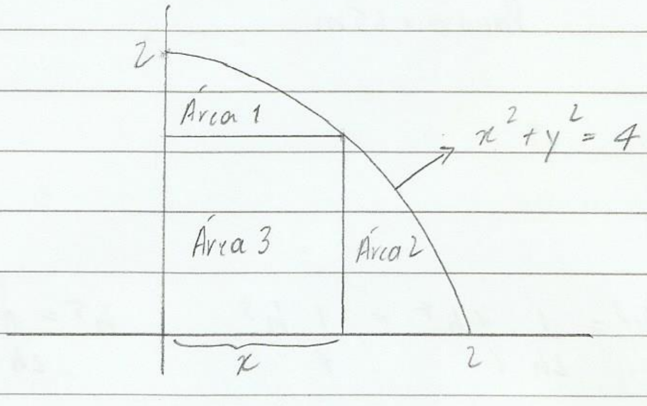
Verificando se $\overset{a,b}{(3,0)}$ satisfaz a inequação

$$0 < \frac{3(3) - 1}{2}$$

$$0 < \frac{8}{2}$$

$$0 < 4 \text{ (V)}$$

Cálculo Numérico Prof. Alvaro



$y(x) = \sqrt{4-x^2}$

$A_1 + A_2 + A_3 = \pi$

$A_1 + A_2 = A_3$

$2A_3 = \pi \Rightarrow A_3 = \pi/2$

$A_3 = x\sqrt{4-x^2} = \pi/2$

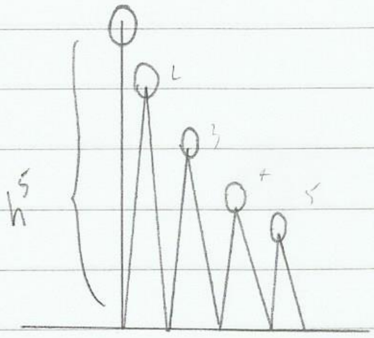
$x^2(4-x^2) = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow 4x^2 - x^4 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow$

$x^4 - 4x^2 + \frac{\pi^2}{4} = 0$

Admitindo $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 4t + \frac{\pi^2}{4} = 0$

$t_1 = 0,76 = x^2 \Rightarrow x = \pm 0,87$

$t_2 = 3,24 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1,80$

② 

Nova alt. $= \frac{1}{2h} \cdot$ altura anterior

Percurso $= 65m$

$h_1 = h^5$

$h_2 = \frac{1}{2h} \cdot h^5 = \frac{1}{2} h^4$

$h^3 = \frac{1}{2h} \cdot \frac{1}{2} h^4 = \frac{1}{4} h^3$

$h^4 = \frac{1}{2h} \cdot \frac{1}{4} h^3 = \frac{1}{8} h^2$

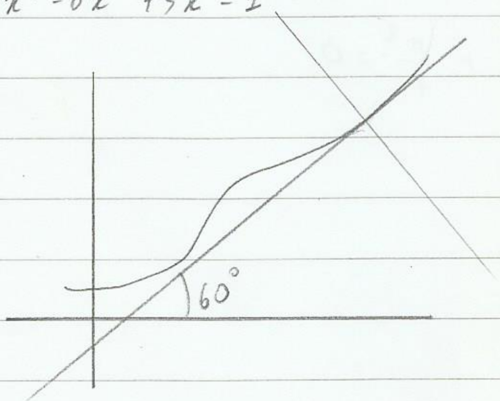
$h^5 = \frac{1}{2h} \cdot \frac{1}{8} h^2 = \frac{1}{16} h$

$$h^5 + \left(\frac{1}{2} h^4 + \frac{1}{4} h^3 + \frac{1}{8} h^2 + \frac{1}{16} h\right) \cdot 2 = 65$$

$$h^5 + h^4 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{h}{8} = 65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8h^5 + 8h^4 + 4h^3 + 2h^2 + h - 520 = 0$$

③ $y = x^4 - 8x^2 + 5x - 1$ $\qquad$ $y'(x) = 4x^3 - 16x + 5$



Exercício

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$

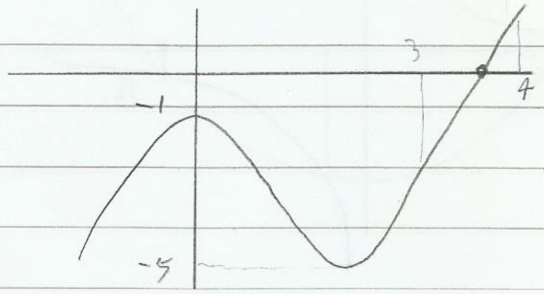
$3x(x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6$ Max $\quad f(0) = -1 \quad f(2) = -5 \quad \begin{cases} Max = (0,-1) \\ Min = (2,-5) \end{cases}$

$f''(2) = 6$ Min

		0		2	
f'	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗



$f(2) < 0$

$f(3) < 0 \quad \alpha \in]3,4[$

$f(4) > 0$

Exercício

Separar as raízes de equações

$^{-8}\ x^{\textcircled{3}} - 3x^{\circ} + 1 = 0$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm 1$

$3(x^2 - 1) = 0$

		-1		1	
f	↘	0	↗	0	↘

$\alpha_2 \in]0,1[$

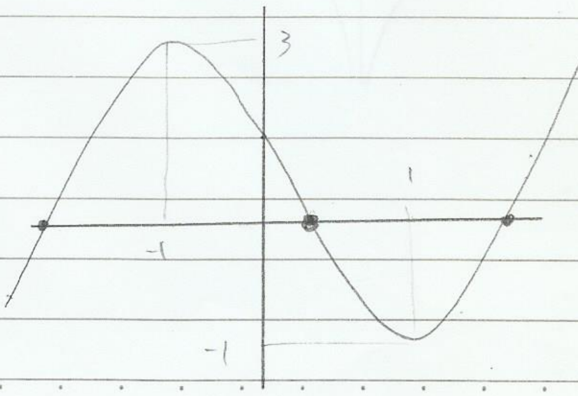
$\alpha_3 \in]1,2[$

$\alpha_1 \in]-2,1[$

$f(1) = -1 < 0$

$f(2) = 3 > 0$

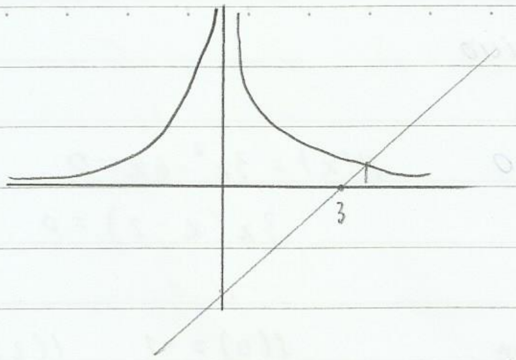
$f(-2) = -1 < 0$



$x^3 - 3x^2 - 1 = 0$

$x^2(x-3) = 1$

$x - 3 = \frac{1}{x^2}$



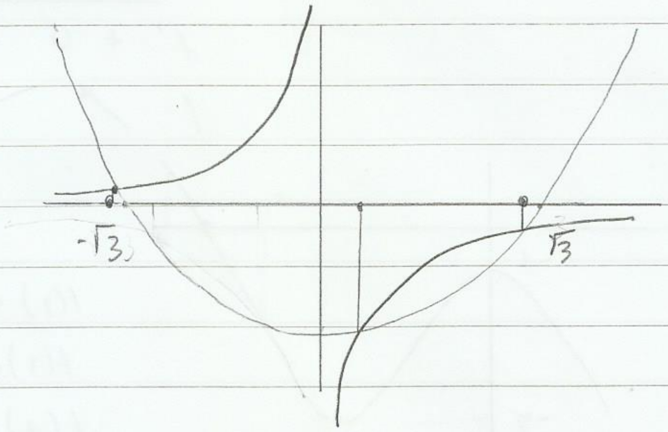
$\left.\begin{array}{l} f(3) < 0 \\ f(4) > 0 \end{array}\right\} \alpha \in]3, 4[$

— // —

$x^3 - 3x + 1 = 0$

$x(x^2 - 3) = -1$

$x^2 - 3 = \frac{-1}{x}$



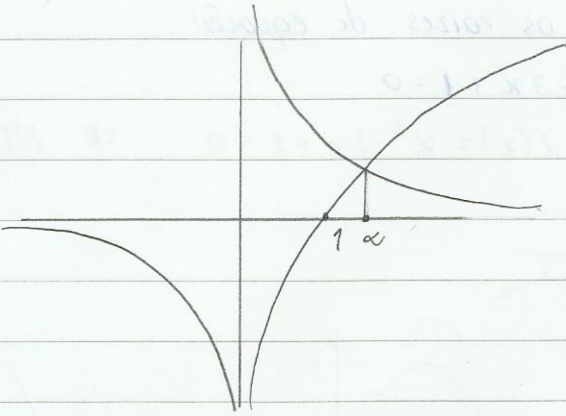
$f(-2) < 0$

— // —

Ex: $x \ln x - 1 = 0$

$x \ln x = 1$

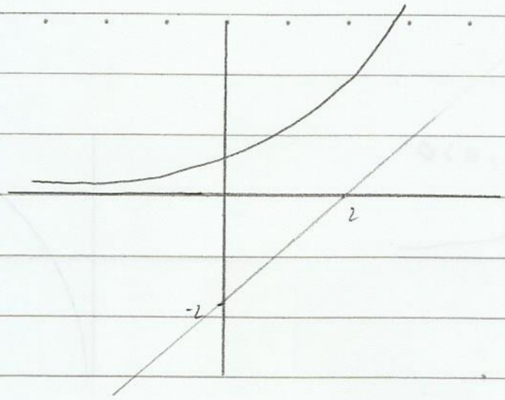
$\ln x = \frac{1}{x}$



$\left.\begin{array}{l} f(2) > 0 \\ f(1) < 0 \end{array}\right\} \alpha \in]1, 2[$

Ex: $e^x - x + 2 = 0$

$e^x = x - 2$



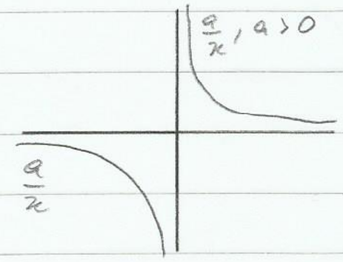
— // —

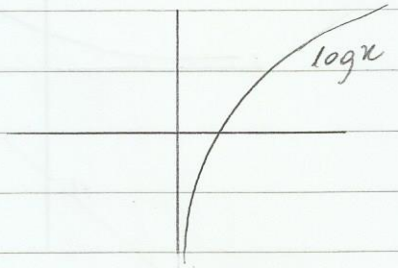
Ex: $\operatorname{cosec}(x) - 1 = 0$

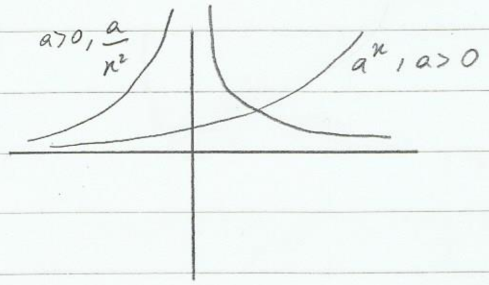
$\frac{1}{\operatorname{sen}(x} = 1 \Rightarrow 1 = \operatorname{sen} x \Rightarrow$

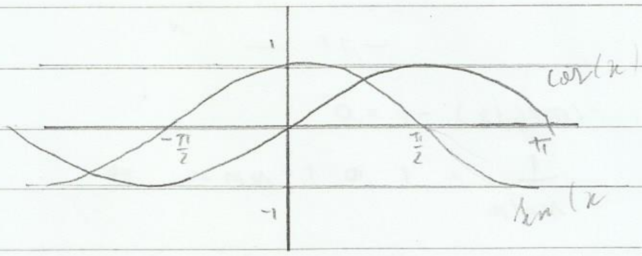
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$

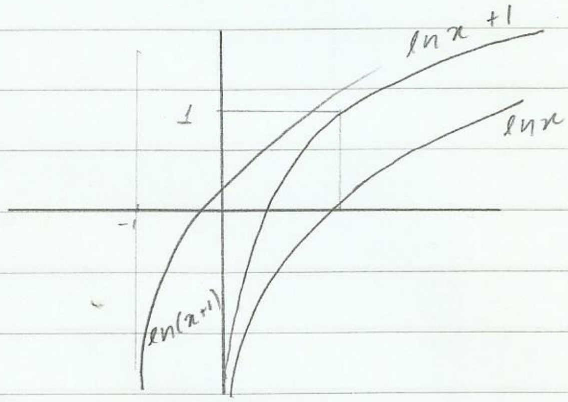
Gráfico









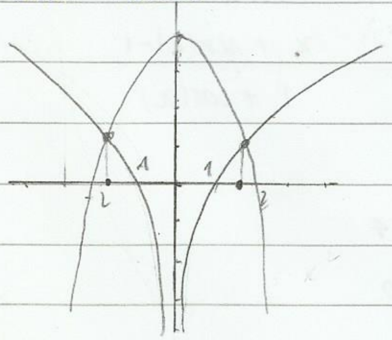


Exercício

Separar as raizes de equações

$x^2 - 4 + \ln x^2 = 0$ e calcular uma raizes

$\ln x^2 = 4 - x^2$



$\alpha_1 \in]-2, -1[$

$\alpha_2 \in]1, 2[$

Método de Newton-Raphson

$$x_{K+1} = x_K - \frac{f(x_K)}{f'(x_K)}$$

Cálculo da raiz α_2 do exercício anterior

$f(x) = x^2 - 4 + \ln x^2 = 0$

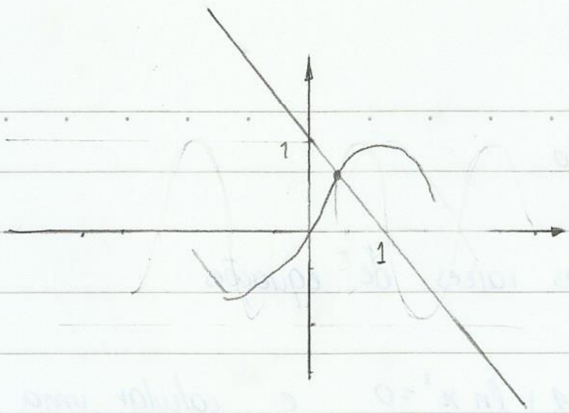
$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2+2}{x} = \frac{2(x^2+1)}{x}$$

$$x_{K+1} = x_K - \left(\frac{x_K^2 - 4 + \ln x_K^2}{\frac{2x_K^2+2}{x_K}} \right) \qquad x_{K+1} = x_K - \frac{x_K(x_K^2 - 4 + \ln x_K^2)}{2x_K^2 + 2}$$

$x_0 = 2$	$x_0 = 1$
$x_1 = 1,723$	$x_1 = 1,75$
$x_2 = 1,711$	$x_2 = 1,711$
$\boxed{x_4 = 1,711}$	

→ $x + \text{sen}\, x = 1$

$\text{sen}\, x = 1 - x$



$\alpha \in]0,1[$

$$x_{K+1} = x_K - \frac{f(x_K)}{f'(x_K)}$$

$$x_0 = x_K - \frac{x + \text{sen}(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$f(x) = x + \text{sen}\, x - 1$

$f'(x) = 1 + \cos(x)$

$x_0 = 1$

$x_1 = 0{,}454$

$x_2 = 0{,}510$

$x_3 = 0{,}511$

$x_4 = 0{,}511$

→ $x(t) = \ln t + t^3 - 7t$

Determine $t_0 \in \mathbb{R} \,/\, x(t_0) \geq x(t), \ \forall t$

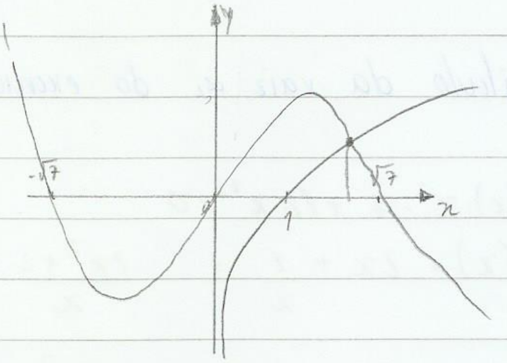
$\ln t = 7t - t^3$

$t(7 - t^2) = 0$

$f(t) = 7t - t^3$

$f'(t) = 7 - 3t^2 = 0 \quad t = \pm 1{,}52$

		$-1{,}52$		$1{,}52$	
f	↘	0	↗	0	↘



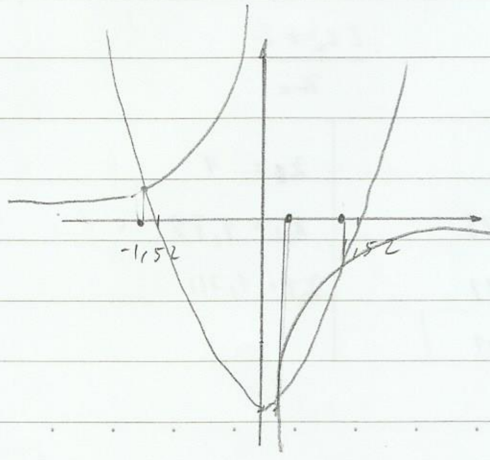
$x(t) = \ln t + t^3 - 7t$

$x'(t) = \frac{1}{t} + 3t^2 - 7 = 0 \ (\times t)$

$x'(t) = 3t^3 - 7t + 1 = 0$

$t(3t^2 - 7) + 1 = 0$

$3t^2 - 7 = \frac{-1}{t}$



$f(t) = 3t^3 - 7t + 1$ $\alpha_1 \in]-2; -1,52[$

$f(-1,52) > 0$ $\alpha_2 \in]0,1[$

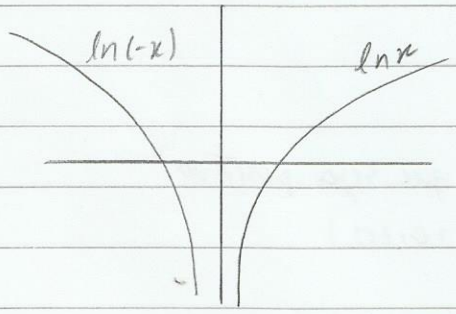
$f(-2) < 0$ $\alpha_3 \in]1; 1,52[$ $f'(t) = 9t^2 - 7$

Exercício

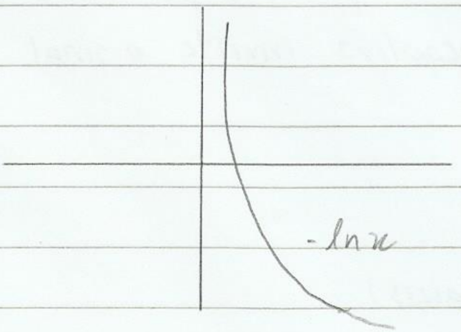
Separar as raízes da equações

$x^5 - 3x^4 + x - 2 = 0$

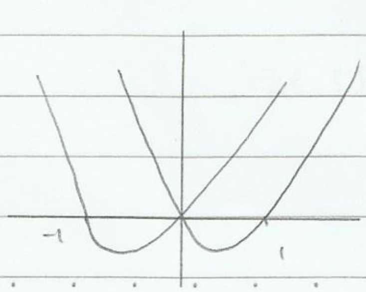
Observação



* Quando troca o sinal do x, o gráfico gira em torno do eixo y



* Quando troca o sinal da função, o gráfico gira em torno do eixo x



$f(x) = x^2 - x$

$f(-x) = x^2 + x$

Método de laguerre

$P_5(x) \;\underline{\big|\, x-a}$

$R \qquad Q_4(x)$

$$P_5(x) = (x-a)\underset{>0}{Q_4(x)}+\underset{>0}{R}$$

$$P_5(x) = x^5-3x^4+x-2$$

- Os valores dos coeficientes não pode ser negativo, Eles podem ser nulos ou positivo

	1	-3	0	0	1	-2
1	1	-2				
2	1	-1				
③	1	0	0	0	1	1

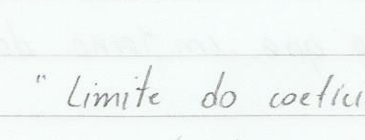
$L=3$ "Limite do coeficiente para que seja positivo" (extremo superior das raizes)

$$P_5(-x) = -x^5-3x^4-x-2$$
$$-P_5(-x) = x^5+3x^4+x+2$$

Caso o primeiro polinômio for negativo inverte o sinal

	1	3	0	0	1	2
1	1	4	4	4	5	7

$L' = -1$ (extremo inferior das raizes)



$r =]2,3[$

Separar as raizes

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x^6 - 3x^3 + x + 4 = 0$$

$$P(x) = x^6 - 3x^3 + x - 4$$

	1	0	0	-3	0	1	-4	$L = 2$
1	1	1	1	-2				
2	1	2	4	5	10	21	38	

$$P(-x) = x^6 + 3x^3 - x - 4$$

	1	0	0	3	0	-1	-4	
1	1	1	1	4	4	3	-1	$L = 2$
2	1	2	2	7	14	27	50	$L' = -2$

$r_1 =]-2, -1[$ $r_2 =]1, 2[$

-2	-1	0	1	2
+	-	-	-	+

$$P'(x) = 6x^5 - 9x^2 + 1$$

$$x_{k+1} = x_0 + \frac{x^6 - 3x^3 + x - 4}{6x^5 \cdot 9x^2 + 1}$$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1{,}756$

$x_2 = 1{,}610$

$x_3 = 1{,}551$

$x_4 = 1{,}543$

$x_5 = 1{,}543$

$x_5 = 1{,}542$

$x_6 = 1{,}542$

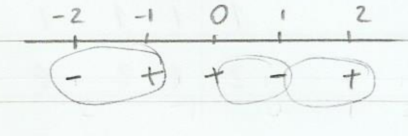
Εκτενίσο

$x^5 - 3x + 1 = 0$

$P(x) = x^5 - 3x + 1$

	1	0	0	0	-3	1
1	1	1	1	1	-2	
2	1	2	4	8	13	27

$L = 2$



$P(-x) = -x^5 + 3x + 1$

$-P(-x) = x^5 - 3x - 1$

	1	0	0	0	-3	-1
1	1	1	1	1	-2	
2	1	2	4	8	13	25

$L = 2$

$L' = -2$

$x = x_0 - \dfrac{x^5 - 3x + 1}{5x^4 - 3}$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1,649$

$x_2 = 1,406$

$x_3 = 1,208$

$x_4 = 1,22$

$x_5 = 1,215$

$x_6 = \boxed{1,215}$

+ Um avião de combate arremete para um alvo obedecendo uma trajetória dada por $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 6x + 6$, efetua o ataque e, imediatamente sobre ~~faz~~ na mesma trajetória. Qual altura ele estava no ataque quando soltou a bomba.

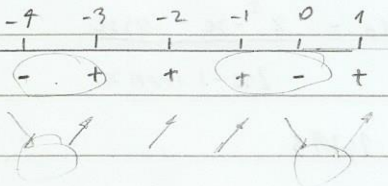
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 6 = 0$

	4	12	-4	-6
1	4	16	12	6

$L = 1$

$f'(-x) = -4x^3 + 12x^2 + 4x - 6$

$-f'(-x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 6$



	4	-12	-4	6
1	4	-8		
2	4	-4		
3	4	0	-4	
4	4	4	12	54

$L = 4$

$L' = -4$

$$x = x_0 - \frac{4x^3 + 12x^2 - 4x - 6}{12x^2 + 24x - 4}$$

$x_0 = 1$

$x_1 : 0,8125$

$x_2 \cdot 0,777$

$x_3 \cdot 0,776$

$x_4 : 0,776$

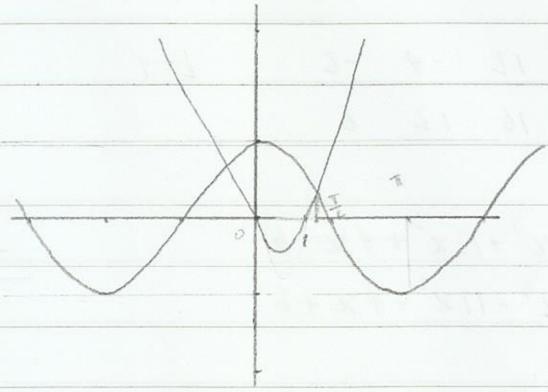
$f(0,776) = \underline{\underline{2,37}}$

1) Separar as raizes da equação $x^2 - x - \cos x = 0$ com auxilio do gráfico, e calcular a maior raiz pelo método de Newton-Raplison

2) Separar as raizes da equação $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ pelo método de Lagnerre

1) $x^2 - x = \cos x$

$x(x-1) = 0$



$x_1 =]1;1,57[$

$$x = x_0 - \frac{x^2 - x - \cos x}{2x - 1 + \sin x}$$

$x_0 : 1,293$

$x_1 \ 1,251$

$x_2 \cdot 1,251$

$x_3 = 1,251$

2-) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5$

	1	-4	3	0	-5
1	1	-3			
2	1	-2			
3	1	-1			
4	1	0	3	12	43

$L = 4$

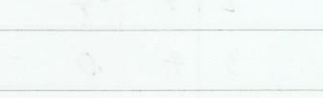
$P(-x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5$

	1	4	3	0	-5
1	1	5	8	8	3

$R_1 \ ]-1,0[$ e $R_2 \ ]3,4[$

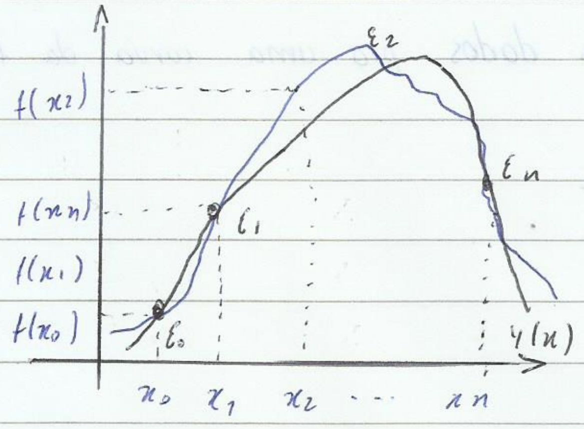
$L = 1$

$L' = -1$



Método dos minimos quodrados

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$



$$y(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x)$$

funcões conhecidas

Residuos

$$\varepsilon_i = f(x_i) - y(x_i)$$

$$S = \sum \varepsilon_i^2 - \sum [f(x_i) - y(x_i)]^2$$

$$S = \sum [f(x_i) - a_0 g_0(x_i) - a_i g_i(x_i)]^2$$

$$\underbrace{\begin{gathered} a_0 \sum g_0^2(x_i) + a_1 \sum g_0(x_i) g(x_i) = \sum g_0(x_i) f(x_i) \\ a_0 \sum g_i(x_i) g_0(x_i) + a_1 \sum g^2(x_i) = \sum g_i(x_i) f(x_i) \end{gathered}}_{\text{Sistema Normal}}$$

/ /

Exemplo

Aproximar os dados pra uma curva da família $y = a_0 x + a_1 x^2$

x	$f(x)$
-1	8
0	0
1	2
2	4

$g_0(x) = x$	$g_1(x) = x^2$	$f(x)$
$g_0(x_0) = -1$	$g_1(x_0) = 1$	$f(x_0) = 8$
$g_0(x_1) = 0$	$g_2(x_1) = 0$	$f(x_1) = 0$
$g_0(x_2) = 1$	$g_0(x_2) = 1$	$f(x_2) = 2$
$g_0(x_3) = 2$	$g_1(x_3) = 4$	$f(x_3) = 4$

$\sum g_0^2(x) = 6$ $\quad \sum g_0 g_1 = 8$ $\quad \sum g_0 f = 2$

$\sum g_1 g_2 = 8$ $\quad \sum g_1^2 = 18$ $\quad \sum g_1 f = 26$

$$\begin{cases} 6a_0 + 8a_1 = 2 \\ 8a_0 + 18a_1 = 26 \end{cases} \qquad \begin{cases} 48a_0 + 64a_1 = 16 \\ -48a_0 - 108a_1 = -156 \end{cases} \qquad a_0 = \frac{2 - 8a_1}{6}$$

$$-44a_1 = -140 \qquad \underline{a_0 = -3,91}$$

$$\underline{a_1 = 3,18}$$

$y = -3,91x + 3,18x^2$

/ /

Exercício

Aproximar os dados para uma curva da família

$y = a_0 + a_1 \sqrt{x}$

x	$f(x)$
1	9
2	4
3	1

$g_0(x) = 1$	$g_1(x) = \sqrt{x}$	$f(x)$
$g_0(x_0) = 1$	$g_1(x_0) = 1$	$f(x_0) = 9$
$g_0(x_1) = 1$	$g_1(x_1) \; \sqrt{2}$	$f(x_1) = 4$
$g_0(x_2) = 1$	$g_1(x_2) \; \sqrt{3}$	$f(x_2) = 1$

$\sum g_0^2 = 3 \quad \sum g_0 g_1 = 4{,}15 \quad \sum g_0 f = 14$

$\sum g_1 g_0 = 4{,}15 \quad \sum g_1^2 = 6 \quad \sum g_1 f = 16{,}39$

$$\begin{cases} 3a_0 + 4{,}15a_1 = 14 \\ 4{,}15a_0 + 6a_1 = 16{,}39 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4{,}15a_0 - 5{,}74a_1 = -19{,}37 \\ 4{,}15a_0 + 6a_1 = 16{,}39 \end{cases}$$

$a_0 = \dfrac{14 - 4{,}15a_1}{3}$

$0{,}26a_1 = -2{,}98$

$a_1 = -11{,}46$

$a_0 = 20{,}52$

$y = -11{,}19 + 20{,}55\sqrt{x}$

→ Realizar o mesmo exercício acima, com os dados:

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

x	$f(x)$
-1	10
0	-1
1	2
2	8

$g_0 = 1$	$g_1 = x$	$g_2 = x^2$	$f(x)$
1	-1	1	10
1	0	0	-1
1	1	1	2
1	2	4	8

$\sum g_0^2 = 4$ $\quad \sum g_0 g_1 = 2$ $\quad \sum g_0 g_2 = 6$ $\quad \sum g_0 f = 19$

$\sum g_0 g_1 = 2$ $\quad \sum g_1^2 = 6$ $\quad \sum g_1 g_2 = 8$ $\quad \sum g_1 f = 8$

$\sum g_0 g_2 = 6$ $\quad \sum g_1 g_2 = 8$ $\quad \sum g^2 = 18$ $\quad \sum g_2 f = 44$

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 19 \\ 2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 8 \\ 6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 44 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 19 \\ 2 & 6 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 18 & 44 \\ \hline & 20 & 20 & -6 \\ & 20 & 36 & 62 \\ \hline & & 320 & 1360 \end{array}$$

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 19 \\ 20a_1 + 20a_2 = -6 \\ 320a_2 = 1360 \end{cases}$$

$a_2 = 4,25$ $\quad a_1 = -4,55$ $\quad a_0 = 0,65$

$y = 0,65 - 4,55x + 4,25x^2$

Resíduos

x	$f(x)$	$y(x)$	ε
-1	10	9,45	0,55
0	-1	0,65	-1,65
1	2	0,35	1,65
2	8	8,55	-0,55

Exercícios

Aproximar os dados por uma curva da família

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$$

x	$f(x)$
0	1
$\pi/2$	2
π	3
$3\pi/2$	1

$g_0 = 1$	$g_1 = \cos x$	$g_2 = \cos 2x$	$f(x)$
1	1	1	1
1	0	-1	2
1	-1	1	3
1	0	-1	1
4	0	0	7
0	2	0	-2
0	0	4	1

$$\begin{cases} 4a_0 = 7 \\ 2a_1 = -2 \\ 4a_2 = 1 \end{cases}$$

$(a_0, a_1, a_2) = (1{,}75 ; -1 ; 0{,}25)$

$\therefore\ y = 1{,}75 - \cos x + 0{,}25 \cos(2x)$

ou

$$y = \frac{7}{4} - \cos x + \frac{1}{4} \cos(2x)$$

x	$f(x)$	$y(x)$	ε
0	1	1	0
$\pi/2$	2	1,5	0,5
π	3	3	0
$3\pi/2$	1	1,5	-0,5

Ex: " $y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$

x	$g_0 = 1$	$g_1 = \cos x$	$g_2 = \operatorname{sen} x$	$f(x)$
0	1	1	0	1
$\pi/2$	1	0	1	2
π	1	-1	0	3
$3\pi/2$	1	0	-1	1
	4	0	0	7
	0	2	0	-2
	0	0	2	1

$4a_0 = 7 \quad a_0 = 7/4$

$2a_1 = -2 \quad a_1 = -1$

$2a_2 = 1. \quad b_2 = 1/2$

$$y = \frac{7}{4} - \cos(x) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x)$$

x	$f(x)$	$y(x)$	ε
0	1	0,75	0,25
$\pi/2$	2	2,25	-0,25
π	3	2,75	0,25
$3\pi/2$	1	1,25	-0,25

(Residuos)

Ex = " $y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x$

x	$g_0 = 1$	$g_1 = \cos x$	$g_2 = \operatorname{sen} x$	$g_3 = \cos 2x$	$f(x)$
0	1	1	0	1	1
$\pi/2$	1	0	1	-1	2
π	1	-1	0	1	3
$3\pi/2$	1	0	-1	-1	1
	4	0	0	0	7
	0	2	0	0	-2
	0	0	2	0	1
	0	0	0	4	1

$$\begin{cases} 4a_0 = 7 & \therefore a_0 = 7/4 \\ 2a_1 = -2 & a_1 = -1 \\ 2a_2 = 1 & a_2 = 1/2 \\ 4a_3 = 1 & a_3 = 1/4 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{7}{4} - \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \cos(2x)$$

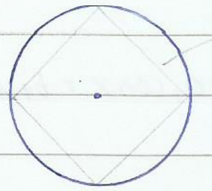
Residuos

x	$f(x)$	$y(x)$	ε
0	1	1	0
$\pi/2$	2	2	0
π	3	3	0
$3\pi/2$	1	1	0

Quando é possivel fazer uma Análise Harmônica

↳ Quando os residuos igual a 0

1-) Passo constante

2-) Cobrir o  trig.

▷ Obs: É os pontos da circunferencia, quando ligados formam um poligono

Como se faz uma análise harmônica

1-) Série de Fourier

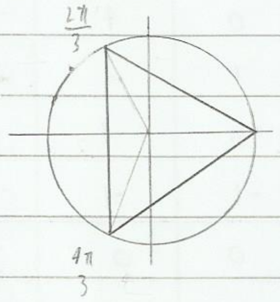
$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x$

2-) nº de termo = nº de dados

Exercicio

Fazer a análise harmônica se possivel

x	$f(x)$
0	-1
$2\pi/3$	3
$4\pi/3$	1



$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$

x	$g_0 = 1$	$g_1 = \cos x$	$g_2 = \operatorname{sen} x$	$f(x)$
0	1	1	0	-1
$\frac{2\pi}{3}$	1	-0,5	$\sqrt{3}/2$	3
$\frac{4\pi}{3}$	1	-0,5	$\sqrt{3}/2$	1
	3	0	0	3
	0	1,5	0	-3
	0	0	1,5	$2\sqrt{3}$

$3a_0 = 3 \therefore a_0 = 1$

$1{,}5a_1 = -3 \therefore a_1 = -2$

$1{,}5\,a_2 = 2\sqrt{3} \therefore \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$f(x) = 1 - \cos x + \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} x$

/ /

Ex: Fazer a análise harmônica se possível

t	x	$f(x) = F(t)$
0	1	-1
$\pi/2$	2	2
π	3	3
$3\pi/2$	4	-1

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x$$

Mudança de variáveis

$$\boxed{t = ax + b} \qquad \begin{cases} 0 = a + b \\ \frac{\pi}{2} = 2a + b \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} = a \qquad b = -\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad t = \frac{\pi}{2}(x-1)$$

t	1	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\cos 2x$	$F(t)$
0	1	1	0	1	-1
$\pi/2$	1	0	1	-1	2
π	1	-1	0	1	3
$3\pi/2$	1	0	-1	-1	-1
	4	0	0	0	3
	0	2	0	0	-4
	0	0	2	0	3
	0	0	0	4	1

$4a_0 = 3 \qquad a_0 = 3/4 = 0{,}75$

$2a_1 = -4 \qquad a_1 = -2 = -2$

$2a_2 = 3 \qquad a_2 = 3/2 = 1{,}5$

$4a_3 = 1 \qquad a_3 = 1/4 = 0{,}25$

$$y = 0{,}75 - 2\cos t + 1{,}5 \operatorname{sen} t + 0{,}25 \cos 2t$$

Onde $t = \frac{\pi}{2}(x-1)$

/ /

- Um tiro de canhão é disparado com uma inclinação a de $f(x) = 2x \oplus x^2 + 3x^3 - x^4$. Qual distância começa cair

$f(x) = 2x + x^2 + 3x^3 - x^4$

$f'(x) = 2 + 2x + 9x^2 - 4x^3$

$= -4x^3 + 9x^2 + 2x + 2$

$-f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x - 2$

	4	-9	-2	-2
1	4	-5		
2	4	-1		
3	4	3	7	19

$L = 3$

-1	0	1	2	3
+	+	+	+	-
			R	

$-f'(-x) = -4x^3 - 9x^2 + 2x - 2$

$-(-f'(-x)) = 4x^3 + 9x^2 - 2x + 2$

	4	9	-2	2
1	4	13	11	13

$L = 1 \quad L^* = -1$

$$x_{k+1} = x_0 - \left(\frac{-4x^3 + 9x^2 + 2x + 2}{-12x^2 + 18x + 2} \right)$$

$x_0 = 2$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2{,}634$

$x_3 = 2{,}533$

$x_4 = 2{,}526$

$x_5 = 2{,}526$

$x_6 = 2{,}526$

/ /

Ex pág 40 (38)

$$\begin{cases} 10x - y + 2z = 4 \\ 2x + ay + z = 5 \\ ax + 3y + bz = 10 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{-1}{10}\right| + \left|\frac{2}{10}\right| = \frac{3}{10} < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{a}\right| \cdot \frac{3}{10} + \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{6}{10a} + \frac{1}{a} = 1 \qquad \frac{6+10}{10a} < 1 \Rightarrow 16 < 10a$$

$$a \geq \frac{16}{10} \geq \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\beta_3 = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot \frac{3}{10} + \left|\frac{3}{b}\right| \cdot \frac{16}{10a} < 1$$

$$\frac{3a^2 + 48}{10ab} < 1 \qquad b > \frac{3a^2 + 48}{10a}$$

$$\begin{cases} 8x - y + z = 4 \\ 2x + 10y + az = 5 \\ bx + y + az = 6 \end{cases}$$

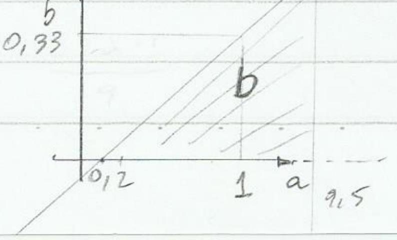
$$\beta_1 = \left|\frac{-1}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

Ⓐ

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{10}\right| \frac{1}{4} + \left|\frac{a}{10}\right| = \frac{1}{20} + \frac{a}{10} < 1 \qquad \frac{1+2a}{20} < 1 \qquad a < \frac{19}{2} \qquad a < 9{,}5$$

$$\beta_3 = \left|\frac{b}{a}\right| \frac{1}{4} + \left|\frac{1}{a}\right| \cdot \frac{1+2a}{20} = \frac{b}{4a} + \frac{1+2a}{20a} = \frac{5b+1+2a}{20a} < 1$$

$$b < \frac{18a-1}{5} \qquad a > \frac{5b+1}{18} \qquad \frac{19}{2} > a > \frac{5b+1}{18}$$



Cálculo numérico

15-)

a-) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3,5 \\ 2x - y - 3z = -2,5 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3,5 \\ 2 & -1 & -3 & -2,5 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ \hline & 0 & -12 & -12 \\ & 3 & -11 & -3,5 \\ \hline & & 36 & 36 \end{array}$$

$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3,5 \\ 3y - 11 = -3,5 \\ 36z = 36 \end{cases}$

$z = 1 \quad y = 2,5 \quad x = 1,5$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3\,\text{sen}\,z = 2,5 \\ x - 2y + \text{sen}\,z = 0,5 \\ x + y - 2\,\text{sen}\,z = 2,0 \end{cases}$ Admitindo $\text{sen}\,z = t$

$\begin{cases} x - 2y + 3t = 2,5 \\ x - 2y + t = 0,5 \\ x + y - 2t = 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2,5 \\ 1 & -2 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 0 & -2 & -2 \\ & -3 & -5 & -0,5 \\ \hline & & -6 & -6 \end{array}$$

$\begin{cases} x - 2y + 3t = 2,5 \\ -3y - 5t = -0,5 \\ -6t = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3,5 \\ y = -1,5 \\ t = 1 \end{cases}$ $t = 1 = \text{sen}\,z \quad \therefore z = \frac{\pi}{2}$

R: $x = -3,5 \quad y = -1,5 \quad z = \frac{\pi}{2}$

(c) $\begin{cases} 5x + 3\ln y - 6z = 2 \\ 3x - 6\ln y + 5z = 2 \\ -6x + 5\ln y + 3z = 2 \end{cases}$ Admitindo $\ln y = t$

$\begin{cases} 5x + 3t - 6z = 2 \\ 3x - 6t + 5z = 2 \\ -6x + 5t + 3z = 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -6 & 5 & 2 \\ -6 & 5 & 3 & 2 \\ \hline & -39 & 43 & 4 \\ & 43 & -21 & 22 \\ \hline & & -1030 & -1030 \end{array}$$

$\begin{cases} 5x + 3t - 6z = 2 \\ \quad -39t + 43z = 4 \\ \quad\quad -1030z = -1030 \end{cases}$

$z = 1 \quad t = 1 \quad x = 1 \quad ; \quad t = 1 = \ln y \quad \therefore \quad y = e$

R: $x = 1, y = e, z = 1$

d) $\begin{cases} 7x^2 - 4y - 2z = 1 \\ -2x^2 + 7y - 4z = 1 \\ -4x^2 - 2y + 7z = 1 \end{cases}$ Admitindo $x^2 = t \therefore x = \sqrt{t}$

$\begin{cases} 7t - 4y - 2z = 1 \\ -2t + 7y - 4z = 1 \\ -4t - 2y + 7z = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 7 & 1 \\ \hline & 41 & -32 & 9 \\ & -30 & 41 & 11 \\ \hline & & 721 & 721 \end{array}$$

$\begin{cases} 7t - 4y - 2z = 1 \\ \quad 41y - 32z = 9 \\ \quad\quad 721z = 721 \end{cases}$

$z = 1 \quad y = 1 \quad t = 1 \quad , \quad t = x^2 = 1 \quad \therefore x = 1$

R: $x = y = z = 1$

e) $$\begin{cases} y + 2\sqrt{z} = 1 \\ -x + y + \sqrt{z} = 2 \\ 2x + y + 5\sqrt{z} = 0 \end{cases}$$

Admitindo $\sqrt{z} = t$ $z = t^2$

$$\begin{cases} -x + y + t = 2 \\ 2x + y + 5t = 0 \\ y + 2t = 1 \end{cases}$$

-1	1	1	2
2	1	5	0
0	1	2	1
	-3	-7	-4
	-1	-2	-1
		-1	-1

$$\begin{cases} -x + y + t = 2 \\ -3y - 7t = -4 \\ -t = -1 \end{cases}$$

$t = 1$ $y = -1$ $x = -2$ R: $x = -2$ $y = -1$ e $z = 1$

$1 = t = \sqrt{z}$ $\therefore z = 1$

f) $$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

1	1	-1	1
1	0	1	3
2	-1	4	1
	-1	2	2
	-3	6	-1
		0	7
		A	B

$A \neq 0$ e $\forall B$ SPD

$A = 0$ e $B = 0$ SPI

$A = 0$ e $B \neq 0$ SI

Sistema Impossivel

/ /

(g) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 0 & 1 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & -3 & 1 & 1 \\ \hline & & 4 & 0 & 0 \\ & & -4 & 2 & 1 \\ \hline & & & 8 & 4 \end{array}$$

$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2y - 2z = 1 \\ 4z = 0 \\ 8t = 4 \end{cases}$

$t = 0{,}5 \quad z = 0 \quad y = 0{,}5 \quad x = 0$

16) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + az = -1 \\ 2x + 3y + az = a \end{cases}$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a & -1 \\ 2 & 3 & a & a \\ \hline & 3 & a-1 & -3 \\ & 5 & a-2 & a-4 \\ \hline & & -2a-1 & 3a+3 \end{array}$$

$A \neq 0$ e $\forall B$ (SPD)

$A = 0$ e $B = 0$ (SPI)

$A = 0$ e $B \neq 0$ (SI)

$-2a - 1 = 0$

$a = -0{,}5$ (O sistema é possivel e indeterminado)

$3a + 3 = 0$

$a = -1$ (O sisteme é impossivel)

17) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + my - z = m \\ mx - y + z = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 & m \\ m & -1 & 1 & -1 \\ \hline & m+1 & -2 & m-1 \\ & -1+m & 1-m & -1-m \\ \hline & & -m^2-m-1 & -m^2-2m-1 \end{array}$$

$A \neq 0$ e $\forall B$ (SPD)

$A = 0$ e $B = 0$ (SPI)

$A \neq 0$ e $B = 0$ (SF)

$-m^2 - m - 1 = 0$

$\nexists m \in \mathbb{R}$

18-) $\begin{cases} x + my + 3z = 1 \\ 2x - y + mz = m \\ x + my + z = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & -1 & m & m \\ 1 & m & 1 & -1 \\ \hline & -1-2m & m-6 & m-2 \\ & 0 & -2 & -2 \\ \hline & & 2+4m & 2+4m \end{array}$$

$A \neq 0$ e $\forall B$ (SPD)
$A = 0$ e $B = 0$ (SPI)
$A = 0$ e $B \neq 0$ (SI)

(I) SPD, quando
$2 + 4m \neq 0$
$m \neq -0,5$

(II) SPI, quando $2+4m = 0$ e $2+4m = 0$
$m = -0,5$

Método Interativo de Gauss-Seidel

(31-) $\begin{cases} x + y - 5z = 4 \\ x - 10y - z = 2 \\ 5x + y + z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 5x + y + z = 1 \\ x - 10y - z = 2 \\ x + y - 5z = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x + 0,2y + 0,2z = 0,2 \\ -0,1x + y + 0,1z = -0,2 \\ -0,2x - 0,2y + z = -0,8 \end{cases}$

$x_{k+1} = 0,2 - 0,2y_k - 0,2z_k$
$y_{k+1} = -0,2 + 0,1x_{k+1} - 0,1z_k$
$z_{k+1} = -0,8 + 0,2x_{k+1} + 0,2y_{k+1}$

Admitindo $x_0 = 0,2$ $y_0 = -0,2$ e $z_0 = -0,8$

	x	y	z
0	0,2	-0,2	-0,8
1	0,4	-0,1	-0,7
2	0,4	-0,1	-0,7

solução

32-) (1)

$$\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ 2x - y + 8z = 4 \\ x - 10y + 4z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ x - 10y + 4z = 5 \\ 2x - y + 8z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 0{,}2y - 0{,}2z = 0{,}4 \\ -0{,}1x + y - 0{,}4z = -0{,}5 \\ 0{,}25x - 0{,}125y + z = 0{,}5 \end{cases}$$

$$x_{k+1} = 0{,}4 - 0{,}2y + 0{,}2z$$

$$y_{k+1} = -0{,}5 + 0{,}1x_{k+1} + 0{,}4z$$

$$z_{k+1} = 0{,}5 - 0{,}25x_{k+1} + 0{,}125y_{k+1}$$

	x	y	z
0	0,4	-0,5	0,6
1	0,62	-0,24	0,32
2	0,51	-0,32	-0,31
3	0,53	0,33	0,33

Critério de convergencia de Sassenfeld

Ex: $$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 4y + mz = 2 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{1}{4}\right| \cdot \frac{2}{3} + \left|\frac{m}{4}\right| = \frac{2+3m}{12} < 1$$

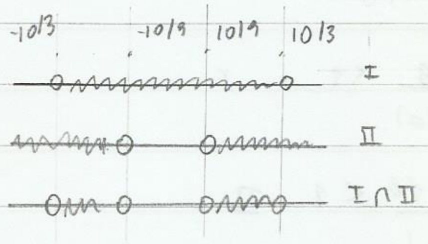
$$\beta_3 = \left|\frac{1}{m}\right| \cdot \frac{2}{3} + \left|\frac{1}{m}\right| \frac{2+3|m|}{12} = \frac{8+2+3|m|}{12|m|} = \frac{10+3|m|}{12|m|}$$

$\frac{2+3|m|}{12} < 1$ $\quad |m| < \frac{10}{3}$ I

$\frac{10+3|m|}{12|m|} < 1$ $\quad 10+3|m| < 12|m|$

$-9|m| < -10$

$|m| > \frac{10}{9}$ II



∴ $\frac{-10}{3} < m < \frac{-10}{9}$ ou

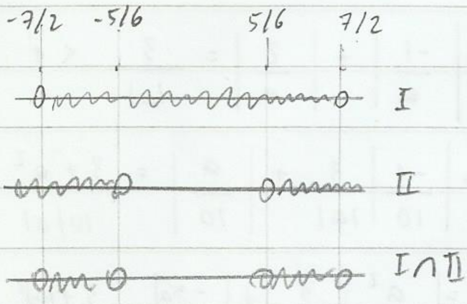
$\frac{10}{9} < m < \frac{10}{3}$

37-) $\begin{cases} 4x + y + z = 1 \\ x + 4y + mz = 2 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$

$\beta_1 = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\beta_2 = \left|\frac{1}{4}\right| \cdot \frac{1}{2} + \left|\frac{m}{4}\right| = \frac{1}{8} + \frac{|m|}{4} = \frac{1+2|m|}{8} < 1$

$\beta_3 = \left|\frac{1}{m}\right| \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{m}\right| \frac{1+2m}{8} = \frac{4+1+2|m|}{8|m|} = \frac{5+2|m|}{8|m|} < 1$



$\frac{1+2|m|}{8} < 1$ $\quad |m| < \frac{7}{2}$ I

$\frac{5+2|m|}{8|m|} < 1$ $\quad -6|m| < -5$

$|m| > \frac{5}{6}$ II

R: $\frac{-7}{2} < m < \frac{-5}{6}$ ou $\frac{5}{6} < m < \frac{7}{2}$

/ /

(38) $\begin{cases} 10x - y + 2z = 4 \\ 2x + ay + z = 5 \\ ax + 3y + bz = 10 \end{cases}$ $a>0$, $b>0$

$\beta_1 = \left|\frac{-1}{10}\right| + \left|\frac{2}{10}\right| = \frac{3}{10} < 1$

$\beta_2 = \left|\frac{2}{a}\right| \cdot \frac{3}{10} + \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{16}{10|a|} = \frac{8}{5|a|} < 1$ I

$\beta_3 = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot \frac{3}{10} + \left|\frac{3}{b}\right| \frac{8}{5|a|} = \frac{3|a|^2 + 48}{10|b||a|} < 1$ II

I $|a| > \frac{8}{5}$ $a > \frac{8}{5}$

II $|b| > \frac{3|a|^2 + 48}{10|a|}$ $\therefore$ $b > \frac{3a^2 + 48}{10a}$

(39) $\begin{cases} ax - y + 2z = 10 \\ -x + 10y + az = -15 \\ a^2x - 5ay + 14z = 5 \end{cases}$

$\beta_1 = \left|\frac{-1}{a}\right| + \left|\frac{2}{a}\right| = \frac{3}{|a|} < 1$ I

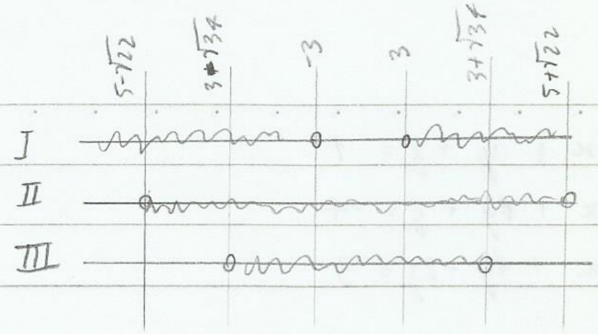
$\beta_2 = \left|\frac{-1}{10}\right| \frac{3}{|a|} + \left|\frac{a}{10}\right| = \frac{3 + a^2}{10|a|} < 1$ II

$\beta_3 = \left|\frac{a^2}{14}\right| \frac{3}{|a|} + \left|\frac{-5a}{14}\right| \cdot \frac{3 + |a|^2}{{}_2 10|a|} = \frac{6|a|^2 + 3|a| + |a|^3}{28|a|} = \frac{|a|^2 + 6|a| + 3}{28} < 1$ III

I -> $|a| > 3$

II -> $10|a| > |a|^2 + 3$ -> $|a|^2 - 10|a| + 3 < 0$ $a < 5 \pm \sqrt{22}$ $\therefore$ $5 - \sqrt{22} < |a| < 5 + \sqrt{22}$

III -> $|a|^2 + 6|a| - 25 < 0$ $3 - \sqrt{34} < |a| < 3 + \sqrt{34}$



40) $\begin{cases} 4x + 2y - z = p \\ 2x - 6y + pz = p^4 \\ x - y - pz = 2 \end{cases}$

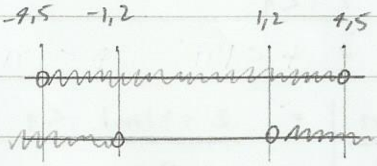
$\beta_1 = \left|\frac{2}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$

$\beta_2 = \left|\frac{2}{-6}\right| \frac{3}{4} + \left|\frac{p}{6}\right| = \frac{6+4p}{24} < 1 \rightarrow \frac{3+2|p|}{12} < 1$ I

$\beta_3 = \left|\frac{1}{-p}\right| \cdot \frac{3}{4} + \left|\frac{-1}{p}\right| \cdot \frac{3+2|p|}{12} = \frac{12+2|p|}{12|p|} < 1$ II

I $\rightarrow$ $|p| < 4{,}5$

II $\rightarrow$ $|p| > 1{,}2$



R: $-4{,}5 < p < -1{,}2$ e $1{,}2 < p < 4{,}5$

(41) (a) $\begin{cases} x - 10y = 20 \\ y + 10z = 10 \\ 5x - z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x - z = 5 \\ x - 10y = 20 \\ y + 10z = 10 \end{cases}$

$\beta_1 = \left|\frac{0}{5}\right| + \left|\frac{-1}{5}\right| = \frac{1}{5} = 0{,}2 < 1$

$\beta_2 = \left|\frac{1}{-10}\right| \cdot 0{,}2 + \left|\frac{0}{10}\right| = 0{,}02 < 1$

$\beta_3 = \left|\frac{0}{10}\right| \cdot 0{,}2 + \left|\frac{1}{10}\right| \cdot 0{,}02 = 0{,}002 < 1$

(41) $\begin{cases} 2x + 8y + z = -4 \\ 5x + y + z = 1 \\ 4x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + y + z = 1 \\ 2x + 8y + z = -4 \\ 4x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$

$\beta_1 = \left|\frac{1}{5}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$

$\beta_2 = \left|\frac{2}{8}\right| . 0,4 + \left|\frac{1}{8}\right| = 0,225 < 1$

$\beta_3 = \left|\frac{4}{-2}\right| . 0,4 + \left|\frac{4}{-2}\right| . 0,225 = 1,25 > 1$ ∴ Portanto não é possível resolver pelo critério

(42) a) $\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 3y - mz = 2 \\ x + y + mz = 3 \end{cases}$

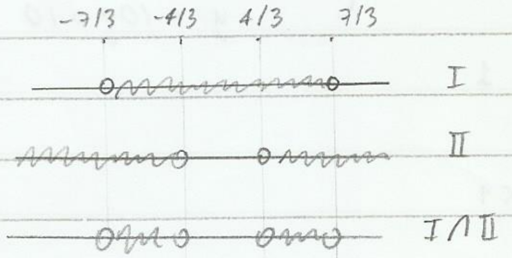
$\beta_1 = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$

$\beta_2 = \left|\frac{1}{3}\right| . \frac{2}{3} + \left|\frac{-m}{3}\right| = \frac{2 + 3|m|}{9} < 1$ I

$\beta_3 = \left|\frac{1}{m}\right| . \frac{2}{3} + \left|\frac{1}{m}\right| . \frac{2 + 3|m|}{9} = \frac{8 + 3|m|}{9|m|}$ II

I $\rightarrow 3|m| < 9 - 2 \rightarrow |m| < 7/3$

II $\rightarrow 8 + 3|m| < 9|m| \rightarrow |m| > 4/3$



R: $\frac{-7}{3} < m < \frac{-4}{3}$

ou

$\frac{4}{7} < m < \frac{7}{3}$

(48) a) $\begin{cases} 8x - y + z = 4 \\ 2x + 10y + az = 5 \\ bx + y + az = 6 \end{cases}$

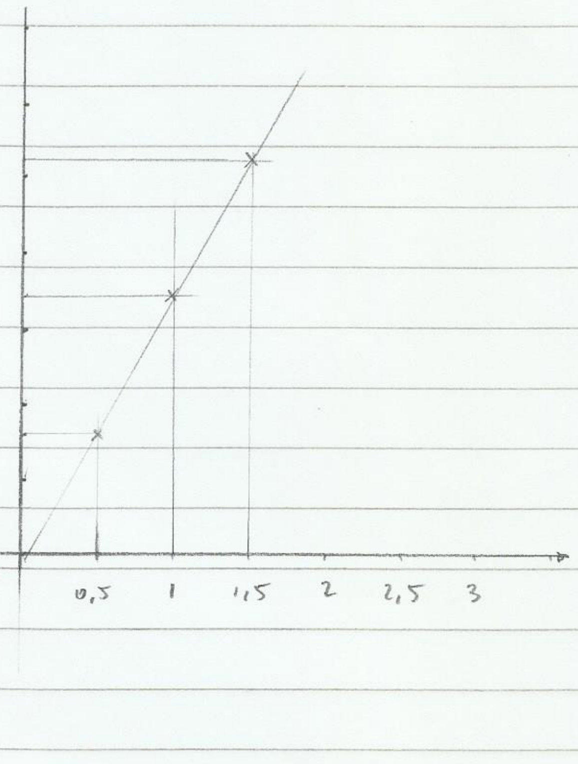
$$\beta_1 = \left|\frac{-1}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{10}\right| \cdot \frac{1}{4} + \left|\frac{a}{10}\right| = \frac{1+2|a|}{20} < 1 \qquad I$$

$$\beta_3 = \left|\frac{b}{a}\right| \cdot \frac{1}{4} + \left|\frac{1}{a}\right| \cdot \frac{1+2|a|}{20} = \frac{5|b| + 2|a| + 1}{20|a|} < 1 \qquad II$$

$I \rightarrow \quad |a| < \frac{20-1}{2} \qquad |a| < \frac{19}{2} \qquad 0 < a < \frac{19}{2}$

$II \rightarrow \quad |b| < \frac{18|a| - 1}{5}$

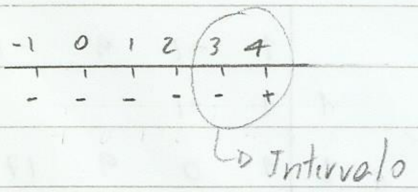


Sistemas não Lineares

-> $x^5 - 3x^4 + x^2 - x - 15 = 0$

	1	-3	0	1	-1	-15
1	1	-2				
2	1	-1				
3	1	0	0	1	2	-9
4	1	1	4	17	67	253

$L = 4$



$P(-x) = -x^5 - 3x^4 + x^2 + x - 15$

$-P(-x) = x^5 + 3x^4 - x^2 - x + 15$

	1	3	0	-1	-1	15
1	1	4	4	3	2	17

$L = 1 \quad L' = -1$

$$x_{k+1} = x_0 - \left(\frac{x^5 - 3x^4 + x^2 - x - 15}{5x^4 - 12x^3 + 2x - 1} \right)$$

$x_0 = 3$

$x_1 = 3{,}105$

$x_2 = 3{,}093$

$x_3 = 3{,}093$

→ Ex II $x^4 + 2x^3 + 9x^2 + x - 9 = 0$

	1	2	9	1	-9
1	1	3	12	13	4

$L = 1$

-2	-1	0	1
+	-	-	+

$P(-x) = x^4 - 2x^3 + 9x^2 - x - 9$

	1	-2	9	-1	-9
1	1	-1			
2	1	0	9	17	25

$l = 2$ $l' = -2$

$$x_{k+1} = x_0 - \left(\frac{x^4 + 2x^3 + 9x^2 + x - 9}{4x^3 + 6x^2 + 18x + 1} \right)$$

$x_0 = -2$

$x_{k+n} = \underline{-1{,}124}$

$x_0 = 0$

$x_{k+n} = \underline{0{,}846}$

(8) - (FEI, P_1 - 2004)

$\ln(T+1) + 5t = 30$

$\ln(t+1) + 5t - 30 = 0$

$T = \ln(T+1) + 5t$

$$T' = \frac{1}{t+1} + 5 = \frac{5t+6}{t+1}$$

$$t_{k+1} = t_k - \left(\frac{(\ln(t+1) + 5t - 30)(t+1)}{5t+6} \right)$$

$t_k = 5$

$t_r = 5{,}6219$

(9) (FEI ,P, -2005)

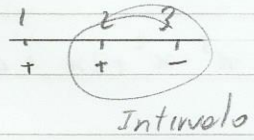
$f(x) = 2x + x^2 + 3x^3 - x^4$ (trajetória)

$f'(x) = 2 + 2x + 9x^2 - 4x^3$

$-P(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x - 2$

	4	-9	-2	-1	2
1	4	-5			
2	4	-1			
3	4	3	7	20	62

$L = 3$



$P(-x) = -4x^3 - 9x^2 + 2x + 2$

$-P(-x) = 4x^3 + 9x^2 - 2x - 2$

	4	9	-2	-2
1	4	13	11	9

$L = 1 \quad L' = 1$

$$x_{K+1} = x_K - \left(\frac{2 + 2x + 9x^2 - 4x^3}{2 + 18x - 12x^2} \right)$$

$x_K = 3$

$x_1 = 2{,}63$

$x_2 = 2{,}53$

$x_3 = 2{,}53$

Exercícios propostos

(a) $5 - x\ln(x+1) = 0$

$f(1) > 0$

$f(2) > 0$

$f(3) > 0$

$f(4) < 0$

$$x_{K+1} = x_K - \left(\frac{(5 - x\ln(x+1))(x+1)}{-(x+1)\ln(x+1)} \right)$$

$x_K = 3$

$x = 3{,}383$

(b) $xe^x - 2 = 0$ $\qquad f'(x) = e^x + xe^x$

$$x_{k+1} = x_t - \left(\frac{xe^x - 2}{e^x + xe^x} \right)$$

$x = 0$

$x = 0,052$

(1B-)

a-) $x^3 - x^2 + 2x + a = 0$ $\qquad I =]-1,0[$

Ajustes de curvas

(1) $f(x) = a_0 x + a_1 \frac{1}{x}$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,4	5,9	7,0	8,5	11,5

x	x	x^{-1}	$f(x)$
1	1	1	4,4
2	2	0,5	5,9
3	3	0,3	7
4	4	0,25	8,5
5	5	0,2	11,5
	55	4,999	128,7
	4,99	1,463	14,108
		55,475	132,587

$a_1 = \frac{132,567}{55,475} = 2,390$

$a_0 = 2,123$

$\therefore \; f(x) = 2,123\, x + \frac{2,390}{x}$

/ /

$\to$ (FEI, P_1-2005)

x	y
0	2
$\pi/4$	2,7
$\pi/2$	3

$y = 2 + \sin x, \ (0 \leq x \leq \pi/2)$

x	a_0	$\sin x$	y
0	1	0	2
$\pi/4$	1	0,7	2,7
$\pi/2$	1	1	3
	3	1,7	7,7
	1,7	1,49	4,89
		1,58	1,58

—11—

$\to$ (FEI, P_1-2009)

t	x	$f(x)$	$f(t)$
0	1	1,5	1,5
$\pi/2$	2	2,6	2,6
π	3	1,3	1,3
$3\pi/2$	4	3,2	3,2

$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$t = ax + b$

$\begin{cases} 0 = a + b \\ \pi/2 = 2a + b \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = -a - b \\ \pi/2 = 2a + b \end{cases}$

$a = \frac{\pi}{2} \quad b = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore \ t = \frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{2} \to t = \frac{\pi}{2}(x - 1)$

$Y = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x) + a_3 \cos(2x)$

t	1	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(2x)$	$f(t)$
0	1	1	0	1	1,5
$\pi/2$	1	0	1	-1	2,6
π	1	-1	0	1	1,3
$3\pi/2$	1	0	-1	-1	3,2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 8,6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$4a_0 = 8,6 \rightarrow a_0 = 2,15$

$2a_1 = 0,2 \rightarrow a_1 = 0,1$

$2a_2 = -0,6 \rightarrow a_2 = -0,3$

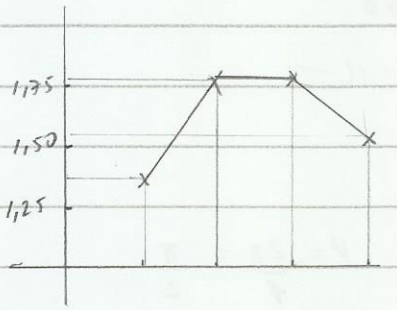
$4a_3 = -3 \rightarrow a_3 = -0,75$

$$y = 2,15 + 0,1\cos(t) - 0,3\,\text{sen}(t) - 0,75\cos(2t)$$

Onde $t = \frac{\pi}{2}(x-1)$

⑥- $y = \frac{x}{a+bx}$ $\qquad \frac{x}{y} = a + bx$; $Y = x/y$

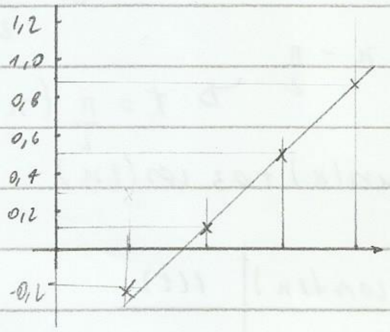
x	$f(x)$	x	Y
1	0,75	1	1,33
2	1,125	2	1,77
3	1,688	3	1,77
4	2,531	4	1,58



$y = ab^x$

$\ln y = \ln a + \ln b^x \rightarrow \ln y = \ln a + x \ln B$

X	Y
1	-0,288
2	0,118
3	0,524
4	0,929



x	a_0	x	Y
1	1	1	-0,288
2	1	2	0,118
3	1	3	0,524
4	4	4	0,929
	4	10	1,283
	10	30	5,236
		20	8,114

$a_1 = 0,406 \quad a_0 = -0,693$

$\therefore a = 0,5 \quad b = 1,5$

$\therefore y = 0,5 \cdot (1,5)^x$

(7) $y = \frac{a}{b+x}$ $\frac{1}{Y} = \frac{b+x}{a}$ Onde: $Y = 1/y$ $A = 1/a$

$B = b/a$ $X = x$

$Y = B + AX$

x	1	x	Y
1	1	1	1,52
2	1	2	1,33
3	1	3	1,25
4	1	4	1,20
	4	10	5,303
	10	30	12,75
		20	-2,03

$A = \frac{-2,03}{20} = -0,1$

$B = \frac{5,303 + 10.0,1}{4} = 1,58$

$A = \frac{1}{a} \therefore a = \frac{1}{A} = -10$

$B = b/a \Rightarrow b = B.a = 15,8$

$y = \frac{-10}{-15,8 + x}$

→ Ex. treino

$y = ab^x$
$\ln y = \ln a + \ln b^x$
$\ln y = \ln a + x \ln b$

$y = ax^b$
$\ln y = \ln a + \ln x^b$
$\ln y = \ln a + b \ln x$

$y = \frac{a}{b+x}$ $\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{x}{a}$

$y = \frac{x}{a+bx}$ $\frac{1}{y} = \frac{a+bx}{x}$

$\frac{x}{y} = a + bx$

Questões de prova de Triangularização de Gaus

→ P1 2º Sem. / 2009 (A)

$$\begin{cases} x + y^2 - \cos z = 4 \\ 2x + 3y^2 - 2\cos z = 12 \\ 3x - 2y^2 - \cos z = -6 \end{cases}$$

Admitindo $y^2 = a$ e $\cos z = b$

$$\begin{cases} x + a - b = 4 \\ 2x + 3a - 2b = 12 \\ 3x - 2a - b = -6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 12 \\ 3 & -2 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 4 \\ & -5 & 2 & -18 \\ \hline & & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + a - b = 4 \\ a = 4 \\ 2b = 2 \end{cases}$$

$b = 1 = \cos z$ $\therefore$ $\underline{z = 0}$

$a = 4 = y^2$ $\therefore$ $\underline{y = \pm 2}$

$\underline{x = 1}$

→ P1 2º Sem / 2009 (B)

$$\begin{cases} 2x + y^2 + \text{sen}\, z = 9 \\ x + 3y^2 - 2\,\text{sen}\, z = 12 \\ 3x - y^2 - \text{sen}\, z = 1 \end{cases}$$

Admitindo $y^2 = a$ e $\text{sen}\, z = b$

$$\begin{cases} 2x + a + b = 9 \\ x + 3a - 2b = 12 \\ 3x - a - b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 5 & -5 & 15 \\ & -5 & -5 & -25 \\ \hline & & -50 & -50 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + a + b = 9 \\ 5a - 5b = 15 \\ -50b = -50 \end{cases}$$

$b = 1 = \text{sen}\, z$ $\therefore$ $z = \pi/2$

$a = 4 = y^2$ $\therefore$ $y = \pm 2$

$x = 2$

→ P1 1º sem / 2010 (B)

$$\begin{cases} 2x + \ln y + \operatorname{sen} z = 6 \\ x + 3\ln y - 2\operatorname{sen} z = 3 \\ 3x - \ln y - \operatorname{sen} z = 4 \end{cases}$$

Admitindo $\ln y = a$ e $\operatorname{sen} z = b$

$$\begin{cases} 2x + a + b = 6 \\ x + 3a - 2b = 3 \\ 3x - a - b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ \hline & 5 & -5 & 0 \\ & -5 & -5 & -10 \\ \hline & & -50 & -50 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + a + b = 6 \\ 5a - 5b = 0 \\ -50b = -50 \end{cases}$$

$b = 1 = \operatorname{sen} z \therefore z = \pi/2$

$a = 1 = \ln y \therefore y = e$

$x = 2$

→ P1 1º sem / 2010 (A)

$$\begin{cases} 2x + y^2 + \operatorname{sen} z = 9 \\ x + 3y^2 - 2\operatorname{sen} z = 12 \\ 3x - y^2 - \operatorname{sen} z = 1 \end{cases}$$

Admitindo $y^2 = a$ e $\operatorname{sen} z = b$

$$\begin{cases} 2x + a + b = 9 \\ x + 3a - 2b = 12 \\ 3x - a - b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & -2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 5 & -5 & 15 \\ & -5 & -5 & -25 \\ \hline & & -50 & -50 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + a + b = 9 \\ 5a - 5b = 15 \\ -50b = -50 \end{cases}$$

$b = 1 = \operatorname{sen} z \therefore \underline{z = \pi/2}$ $\quad a = 4 = y^2 \therefore \underline{y = \pm 2}$ $\quad \underline{x = 2}$

→ P_1 2º sem/2008 (A)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2-14)z = a+2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & & 4 \\ 3 & -1 & 5 & & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & & a+2 \\ \hline & -7 & 14 & & -10 \\ & -7 & a^2-2 & & a-14 \\ \hline & & a^2 & +112 & -7a+28 \end{array}$$

Para que seja possível e determinado $a^2+112 \neq 0$

$a \neq \sqrt{-112}$

$\nexists$ $a \in \mathbb{R}$ para que seja indeterminado

→ P_1 2º sem/2008 (B)

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - y - 3z = -6 \\ 2x - 2y + (b^2-13)z = b+1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & & 4 \\ 2 & -1 & -3 & & -6 \\ 2 & -2 & b^2-13 & & b+1 \\ \hline & -7 & -7 & & -14 \\ & -8 & b^2-17 & & b-7 \\ \hline & & b^2 & +63 & b-63 \end{array}$$

Para que seja possível e determinado $b^2+63 \neq 0$

$b = 7{,}94$

/ /

→ P1 2º sem./2010 (B)

$$\begin{cases} ax + y/b - \sqrt{c}.z = 0 \\ ax + 2\,y/b - 2\sqrt{c}.z = -1 \\ 2ax^2 - y/b + 2\sqrt{c}.z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} a + 2/b - 3\sqrt{c} = 0 \\ a + 4/b - 6\sqrt{c} = -1 \\ 2a - 2/b + 6\sqrt{c} = 6 \end{cases}$$

Admitindo $\frac{1}{b} = t$ e $\sqrt{c} = u$

$$\begin{cases} a + 2t - 3u = 0 \\ a + 4t - 6u = -1 \\ 2a - 2t + 6u = 6 \end{cases} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & -1 \\ & -6 & 12 & 6 \\ \hline & & 6 & 6 \end{array}$$

$$\begin{cases} a + 2t - 3u = 0 \\ \quad 2t - 3u = -1 \\ \quad\quad 6u = 6 \end{cases}$$

$u = 1 = \sqrt{c} \therefore \underline{c = 1}$ $\quad \underline{a = 1}$

$t = 1 = \frac{1}{b} \therefore \underline{b = 1}$

→ P1 2º sem/2010 (A)

$$\begin{cases} a^2x + y/b - cz = 0 \\ a^2x + 2\,y/b - 2cz = -1 \\ 2a^2x^2 - y/b + 2cz = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + 2/b - 3c = 0 \\ a^2 + 4/b - 6z = -1 \\ 2a^2 - 2/b + 6c = 6 \end{cases} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & -1 \\ & -6 & 12 & 6 \\ \hline & & 6 & 6 \end{array}$$

Admitindo $\quad 6c = 6 \therefore \underline{c = 1}$

$a^2 = u \quad 2t - 3c = -1 \quad t = 1 = 1/b \therefore \underline{b = 1}$

$1/b = t \quad u + 2t - 3c = 0 \quad u = 1 = a^2 \therefore \underline{a = \pm 1}$

→ P1 1º sem/2009 (A)

$x + y = ?$

$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 4 \\ 3x - \sqrt{y} = 4 \end{cases}$ Admitindo $\sqrt{y} = t$

I + II

$\begin{cases} x + t = 4 & \text{I} \\ 3x - t = 4 & \text{II} \end{cases}$ $4x = 8$ $t = 2$ $\therefore y = t^2$

$x = 2$ $y = 4$

$x + y = 2 + 4 = \underline{6}$

→ P1 1º sem/2009 (B)

$x + 2y = ?$

Admitindo $\sqrt{x} = t$

$\begin{cases} \sqrt{x} - y = 1 \\ \sqrt{x} + 2y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} t - y = 1 \\ t + 2y = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} -t + y = -1 & \text{I} \\ t + 2y = 7 & \text{II} \end{cases}$

I + II ⇒ $3y = 6$ $t = 7 - 2.2$ $\sqrt{x} = t$

$y = 2$ $t = 3$ $x = t^2 = 3^2 = 9$

$x + 2y = 9 + 2.2 = \underline{13}$

/ /

Critério de convergência

→ P_1 2010 1º sem/2010 (B)

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = p \\ 2x - 4y + pz = p^4 \\ x - y - pz = 2 \end{cases}$$

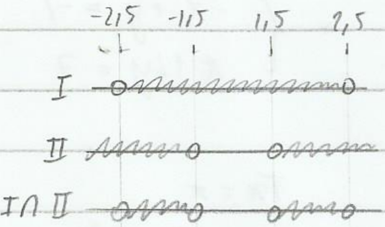
$$\beta_1 = \left|\frac{2}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{3}{4} = 0,75 < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{-4}\right| \cdot \frac{3}{4} + \left|\frac{p}{-4}\right| = \frac{6 + 4|p|}{16} < 1 \sim \frac{3 + 2|p|}{8} < 1 \quad I$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{-p}\right| \cdot \frac{3}{4} + \left|\frac{-1}{p}\right| \cdot \frac{3 + 2|p|}{8} = \frac{9 + 2|p|}{8|p|} < 1 \quad II$$

$I \rightarrow \quad |p| < 5/2 \quad \rightarrow \quad |p| < 2,5$

$II \rightarrow \quad |p| > 9/6 \quad \rightarrow \quad |p| > 1,5$



R: $-2,5 < p < -1,5$

$1,5 < p < 2,5$

→ P_1 2010 1º sem. (A)

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = p \\ 2x - 6y + pz = p^4 \\ x - y - pz = 2 \end{cases}$$

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{-6}\right| \cdot \frac{3}{\cancel{4}\,2} + \left|\frac{p}{-6}\right| = \frac{3 + 2|p|}{12} < 1$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{p}\right| \cdot \frac{3}{4} + \left|\frac{1}{p}\right| \frac{3 + 2|p|}{12} = \frac{12 + 2|p|}{12|p|} < 1$$

$|p| < 4,5 \quad |p| > 1,2$

$$\beta_1 = \left|\frac{2}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$$

-> 2º sem. /2010 (B)

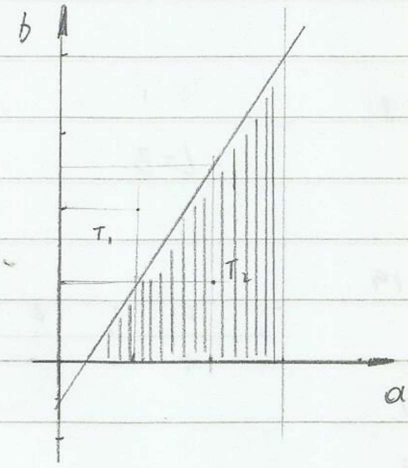
$$\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + az = 5 \\ bx + y + az = 12 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\beta_2 = \left|\frac{2}{4}\right| \cdot \frac{1}{2} + \left|\frac{a}{4}\right| = \frac{1+|a|}{4} < 1 \Rightarrow |a| < 3$$

$$\beta_3 = \left|\frac{b}{a}\right| \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{a}\right| \frac{1+|a|}{4} = \frac{2|b|+|a|+1}{4|a|} < 1 \Rightarrow |b| < \frac{3|a|-1}{2}$$

$a < 3$ e $b < 1{,}5a - 0{,}5$



$T_1 = (1,2)$ $\quad 2 < 1{,}5 - 0{,}5$ F

$T_2 = (2,1)$ $\quad 1 < 1{,}5 . 2 - 0{,}5$ V

∴ A região T_2 é o gráfico

-> 2º sem. /2010 (A)

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + az = 5 \\ bx + y + az = 12 \end{cases}$$

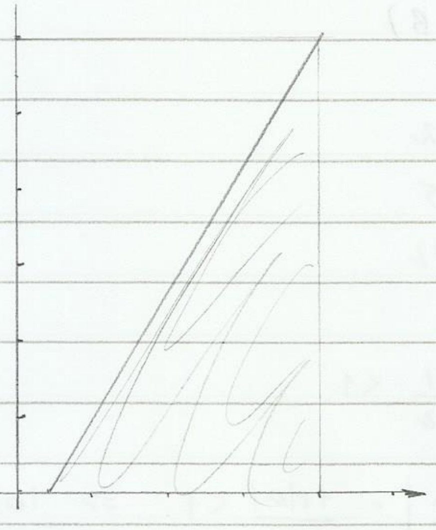
$$\beta_2 = \left|\frac{2}{5}\right| \cdot \frac{1}{2} + \left|\frac{a}{5}\right| = \frac{1+|a|}{5} < 1 \rightarrow |a| < 4$$

$$\beta_3 = \left|\frac{b}{a}\right| \cdot \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{a}\right| \frac{1+|a|}{5} = \frac{5|b|+2|a|+2}{10|a|} < 1$$

$$|b| < \frac{10|a| - 2|a| - 2}{5} \qquad |b| < 1{,}6a - 0{,}4$$

$a =]0,4[$

$b = 1,6a - 0,4$

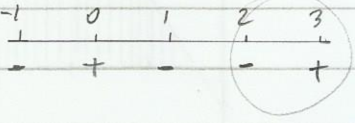


P_1 - 2009 2º Semestre A

$f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$

	1	-2	-2	-1	0	1
1	1	-1				
2	1	0	-2			
3	1	1	1	2	6	19

$L = 3$



$f(-x) = -x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$

$-f(-x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$

	1	2	-2	1	0	-1
1	1	3	1	2	2	1

$L = 1 \quad L' = -1$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1}{5x^4 - 8x^3 - 6x^2 - 2x} \right)$$

$x_0 = 3$

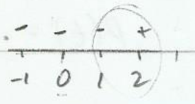
$x_1 = \underline{2,9}$

→ P1 2010 1ºSim(B)

$f(x) = x^4 - 6x + 6$ $f'(x) = 4x^3 - 6$

	4	0	0	-6
1	4	4	4	-2
2	4	8	16	26

$L = 2$



$f'(-x) = -4x^3 - 6$

$-f'(-x) = 4x^3 + 6$

	4	0	0	6
1	4	4	4	10

$L' = -1$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{4x_k^3 - 6}{12x_k^2} \right)$$

$x_k = 1$ $x_2 = 1,1$

$x_1 = 1,2$ $x_3 = \underline{1,1}$

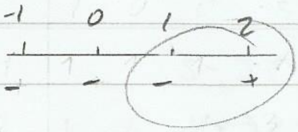
→ 2010 1ºsim. P1 A

	4	0	0	-5
1	4	4	4	-1
2	4	8	16	27

$L = 2$

$f(x) = x^4 - 5x + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 5$



	4	0	0	5
1	4	4	4	5

$L' = -1$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{4x^3 - 5}{12x^2} \right)$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1,1$

$x_2 = 1,1$

/ /

→ 2º sem. 2008 P1 A

$$S(t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + 3t^2 - 4t + 10$$

$$S'(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 4 = 11$$

$$P(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 15$$

$$P(-t) = -t^3 - 3t^2 - 6t - 15$$

$$-P(-t) = t^3 + 3t^2 + 6t + 15$$

	1	-3	6	-15
1	1	-2		
2	1	-1		
3	1	0	6	3

$L = 3$

	1	3	6	15
1	1	4	10	25

$L' = -1$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{t^3 - 3t^2 + 6t - 15}{3t^2 - 6t + 6} \right)$$

$x_0 = 2$ $\quad x_3 = 2,8$

$x_1 = 3,2$ $\quad x_4 = 2,8$

$x_2 = 2,8$ $\quad x_5 = 2,8$

→ 2º semestre 2008 P1 B

$$S(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 2t + 12$$

$$S'(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 2$$

$$S'(-t) = -t^3 - 2t^2 - 5t - 2$$

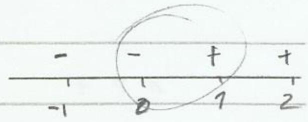
$$-S'(-t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 2$$

	1	-2	5	-2
1	1	-1		
2	1	0	5	8

$L = 2$

	1	2	5	2
1	1	3	8	10

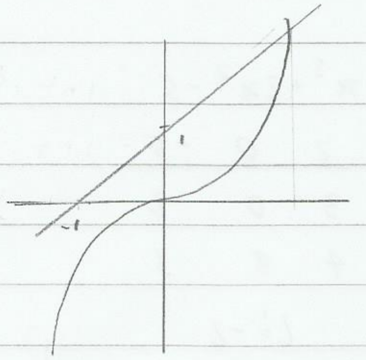
$L' = -1$



$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{t^3 - 2t^2 + 5t - 2}{3t^2 - 4t + 5} \right)$$

$x_0 = 0$ $\quad x_1 = 0,4$ $\quad x_2 = 0,5$ $\quad x_3 = 0,5$ $\quad x_4 = 0,5$

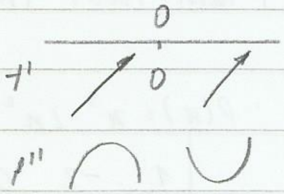
→ 2010 2º sem. P1 B



$T = t^3$

$T' = 3t^2$

$T'' = 6t = 0$



$f(t) = t^3 - t - 1$

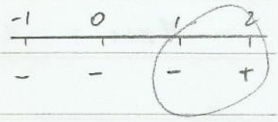
	1	0	-1	-1
1	1	1	0	-1
2	1	2	3	5

$L = 2$

$-f(-t) = t^3 - t + 1$

	1	0	-1	1
1	1	1	0	1

$L' = -1$



$$x\,k+1 = x_t - \left(\frac{t^3 - t - 1}{3t^2 - 1} \right)$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1{,}5$

$x_2 = 1{,}3$

$x_3 = \underline{\underline{1{,}3}}$

→ 2010 2º sem. P1 A

$f(t) = t^3 - t - 1$

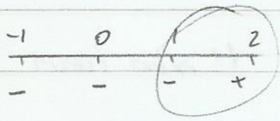
	1	0	-1	-1
1	1	1	0	-1
2	1	2	3	5

$L = 2$

$-f(-t) = t^3 - t + 1$

	1	0	-1	1
1	1	1	0	1

$L' = -1$



$$x_{K+1} = x_K - \left(\frac{t^3 - t - 1}{3t^2 - 1} \right)$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1{,}5$

$x_2 = 1{,}3$

$x_3 = \underline{1{,}3}$

/ /

-▷ 1º mm 12009 (A)

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5 = 0$

	1	-2	0	5
1	1	-1		
2	1	0	0	5

$L = 2$

$-P(-x) = x^3 + 2x^2 - 5$

	1	2	0	-5
1	1	3	0	-2
2	1	4	8	3

$L' = -2$

-2	-1	0	1	2
-	+	+	+	+

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 5}{3x^2 - 4x} \right)$$

$x_0 = -2$

$x_1 = -1,5$

$x_2 = -1,3$

$x_3 = -1,2$

$x_4 = \underline{-1,2}$

-▷ 1º mm 12009 (B)

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5 = 0$

	1	-2	0	5
1	1	-1		
2	1	0	0	5

$L = 2$

-2	-1	0	1	2
-	+	+	+	+

$-P(-x) = x^3 + 2x^2 - 5$

	1	2	0	-5
1	1	3	3	-2
2	1	4	8	11

$L' = -2$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 5}{3x^2 - 4x} \right)$$

$x_0 = -2$

$x_1 = -1,5$

$x_2 = -1,3$

$x_3 = -1,2$

$x_4 = \underline{-1,2}$

→ P_1 2010 $y = a_0 + a_1\cos(x) + a_2\,\text{sen}(x) + a_3\cos(2x)$

$t = ax + b$

$$\begin{cases} 0 = 10a + b \\ \frac{\pi}{2} = 30a + b \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} = 20a \therefore a = \frac{\pi}{40}$$

$$b = -10 \cdot \frac{\pi}{10} = \frac{-\pi}{4}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{40}x - \frac{\pi}{4}$$

t	1	cos(t)	sen(t)	cos(2t)	
0	1	1	0	1	30
π/2	1	0	1	-1	16
π	1	-1	0	1	-2
3π/2	1	0	-1	-1	10
	4	0	0	0	54
	0	2	0	0	32
	0	0	2	0	6
	0	0	0	4	2

$4a_0 = 54 \therefore a_0 = 13{,}5$

$2a_1 = 32 \therefore a_1 = 16$

$2a_2 = 6 \therefore a_2 = 3$

$4a_3 = 2 \therefore a_3 = 0{,}5$

$$y = 13{,}5 + 16\cos(t) + 3\,\text{sen}(t) + 0{,}5\cos(2t)$$

Onde $t = \frac{\pi}{40}x - \frac{\pi}{4}$

Calculo Numério (P2)

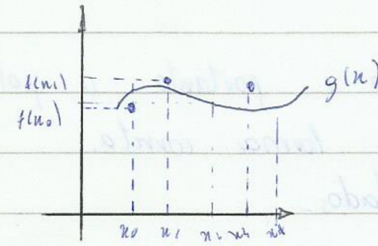
Interpolação

Considere uma função $f(x)$ dada pelos pontos

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

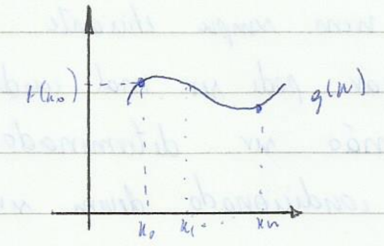
Interpolar consiste em aproximar $f(x)$ por uma função $g(x)$ tal que:

$f(x_i) = g(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$



Ajuste de curvas

mmQ $\min \sum_{i=0}^{n} |g(x) - f(x)|^2$



Interpolação

$f(x) \cong g(x), \ \forall \ x \in [x_0, x_n]$

Interpolação Polinomial

$g(x)$ é um polinômio de grau n se a tabela de pontos possuir $(n+1)$ pontos.

Considere $f(x)$ dada por:

x_0	x_1	x_2
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

Grau do polinômio interpolador 2

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde a_0, a_1, a_2 devem ser determinado

$$\begin{cases} p(x_0) = a_2 (x_0)^2 + a_1 (x_0) + a_0 = f(x_0) \\ p(x_1) = a_2 (x_1)^2 + a_1 (x_1) + a_0 = f(x_1) \\ p(x_2) = a_2 (x_2)^2 + a_1 (x_2) + a_0 = f(x_2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, obtém-se a_0, a_1, a_2 e consequentemente o polinômio $p(x)$.

Determinar o polinômio interpolador utilizando o procedimento anterior é simples porém, nem sempre eficiente

O sistema linear pode ser mal condicionado e portanto o polinômio interpolador pode não ser determinado de forma correta.

Sistema mal condicionado devem ser evitados.

Polinômio Interpolador de Lagrange

-> Evita mal condicionamento do sistema

Considere a tabela dada

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

$(n+1)$ pontos

polinômio de Lagrange (de grau n).

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \cdot f(x_0) +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \cdot f(x_1) +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \quad f(x_2) +$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \quad f(x_n)$$

$$f(x) \cong p(x) \quad \forall x \in [x_0, x_n]$$

Exemplos:

1) Utilizando os pontos da tabela transformá-la, por interpolação, numa tabela com passo unitário

x	0	2	5
$f(x)$	2,8	3,1	5,6

$$p(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)} \cdot 2,8 +$$

$$\frac{(x-0)(x-5)}{(2-0)(2-5)} \cdot 3,1 +$$

$$\frac{(x-0)(x-2)}{(5-0)(5-2)} \cdot 5,6$$

$$p(x) = \frac{x^2-7x+10}{10} \cdot 2,8 + \frac{x^2-5x}{-6} \cdot 3,1 + \frac{x^2-2x}{15} \cdot 5,6$$

$$p(x) = (x^2-7x+10) \cdot 0,28 - 0,52(x^2-5x) + 0,37(x^2-2x)$$

$p(x) = (0{,}28 - 0{,}52 + 0{,}37)x^2 + (-1{,}96 + 2{,}6 - 0{,}74)x + 2{,}8$

$\underbrace{p(x) = 0{,}13x^2 - 0{,}1x + 2{,}8}$

$f(1) \cong p(1) = 2{,}83$
$f(2) \cong p(2) = 3{,}12$
$f(3) \cong p(3) = 3{,}67$
$f(4) \cong p(4) = 4{,}48$

tabela com passo 1

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,8	2,83	3,1	3,67	4,48	5,6

2) Dada a tabela, qual o valor de x quando $f(x) = 3$?

x	2	5	8
$f(x)$	1	2	6

$$p(x) = \frac{(x-5)(x-8)}{(2-5)(2-8)} \cdot 1 + \frac{(x-2)(x-8)}{(5-2)(5-8)} \cdot 2 + \frac{(x-2)(x-5)}{(8-2)(8-5)} \cdot 6$$

$$= \frac{x^2 - 13x + 40}{18} + \frac{x^2 - 10x + 16}{+9} \cdot 2 + \frac{x^2 - 7x + 10}{18} \cdot 6$$

$$= \frac{(x^2 - 13x + 40) + (x^2 - 7x + 10) \cdot 6 + (x^2 - 10x + 16) \cdot (-4)}{18}$$

$$= \frac{3x^2 - 15x + 36}{18} = \frac{x^2 - 5x + 12}{6}$$

$$p(x) = \frac{(x^2 - 5x + 12)}{6}$$

$x^2 - 5x + 12 = 3 \cdot 6$

▷ Resposta: $f(6) = 3$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$ ∴ $x_1 = \frac{5 + 7}{2} = 6$ $\quad x_2 = \frac{5 - 7}{2} = \cancel{-1}$ → Não serve pois $-1 \notin [2, 8]$

3.) Considere que a função $f(x)$ dada no exemplo anterior possui inversa. Determine x tal que $f(x) = 3$

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 12}{6}$$

y	1	2	6
x	2	5	8

$$p(y) = \frac{(y-2)(y-6)}{(1-2)(1-6)} \cdot 2 + \frac{(y-1)(y-6)}{(2-1)(2-6)} \cdot 5 + \frac{(y-1)(y-2)}{(6-1)(6-2)} \cdot 8$$

$$p(3) = \frac{(3-2)(3-6)}{(-1)(-5)} \cdot 2 + \frac{(3-1)(3-6)}{1 \cdot -4} \cdot 5 + \frac{(3-1)(3-2)}{5 \cdot 4} \cdot 8$$

$$p(3) = 7{,}1 \qquad \boxed{p(3) = 7{,}1}$$

Interpolação

Exercícios

1.) Sabendo que a equação $x - e^{-x} = 0$ admite raiz no intervalo $[0,1]$, determine o valor dessa raiz usando interpolação quadrática

x	0	0,5	1
$f(x) = x - e^{-x}$	-1	-0,11	0,63

$$f(x) \cong \frac{(x-0{,}5)(x-1)}{(0-0{,}5)(0-1)} \cdot (-1) + \frac{(x-0)(x-1)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)} \cdot (-0{,}11) + \frac{(x-0)(x-0{,}5)}{(1-0)(1-0{,}5)} \cdot 0{,}63$$

$$= \frac{x^2 - 1,5x + 0,5}{0,5} \cdot (-1) + \frac{x^2 - x}{-0,25} (-0,11) + \frac{x^2 - 0,5x}{0,5} \, 0,63$$

$$f(x) \cong \left(-2 + \frac{0,11}{0,25} + \frac{0,63}{0,5}\right)x^2 + \left(3 - \frac{0,11}{0,25} - 0,63\right)x - 1$$

$$f(x) \cong -0,3x^2 + 1,93x - 1$$

Queremos x tal que

$f(x) = 0$

$-0,3x^2 + 1,93x - 1 = 0$

$\Delta = 1,93^2 - 4.(-1).(-0,3) = 2,5249$

$x = \frac{-1,93 \pm 1,59}{-0,6}$ $\quad x_1 = 0,57$ | $\boxed{x_2 = 5,86}$ Não serve

2) A tabela relaciona a quantidade ideal de calorias em função da idade e do peso, para homens que fazem alguma atividade física. Usando o polinômio interpolador linear, determine a cota aproximada de calorias para um homem de 30 anos e 65 kilos

Cota de calorias

Idade ↓

Peso (kg)	25	45	65 (Idade)
50	2500	2350	1950
60	2850	2700	2250
→ 70	3200	3000	2550
80	3550	3350	2800

idade 30 anos

peso 65 kg

$Q(p, i) = ?$

Homens de 25 anos

Peso	60	70
Calorias	2850	3200

$$Q(p) \cong \frac{(p-70)}{(60-70)} . 2850 + \frac{(p-60)}{(70-60)} . 3200$$

$$Q(65) \cong \underbrace{3025}$$

cota de calorias para um homem de 25 anos e 65 kg

Homem de 45 anos

Peso	60	70
Calorias	2700	3000

$$Q(p) = \frac{(p-70)}{(60-70)} . 2700 + \frac{(p-60)}{(70-60)} . 3000$$

$$Q(65) = \frac{(65-70)}{(60-70)} . 2700 + \frac{(65-60)}{(70-60)} . 3000 = \underbrace{2850}$$

cota de calorias para homens de 45 kg e 65 kg

Homem de 65 kg

Idade	25	45
Calorias	3025	2850

$$Q(i) = \frac{(p-45)}{(25-45)} . 3025 + \frac{(p-25)}{(45-25)} \, 2850$$

$$Q(30) = \frac{(30-45)}{(25-45)} . 3025 + \frac{(30-25)}{(45-25)} . 2850 = \underbrace{2981,25}$$

cota de calorias para um homem de 65kg e 30 anos

/ /

Termo Complementar da Interpolação

$$f(x) = \underbrace{p(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{polinômio} \\ \text{interpolador}}} + \underbrace{R(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{termo complementar}}}$$

Considere $f(x)$ dada por $(n+1)$ pontos da tabela

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$		$f(x_n)$

É possível mostrar que:

$$R(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \text{ onde } x_0 \leq c \leq x_n$$

Da impossibilidade ou dificuldade de se determinar c, delimitamos o erro de truncamento, $E_T(x)$

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq c \leq x_n} |f^{n+1}(c)|$$

Exemplo

1) Delimite o erro de truncamento ao aproximar $f(0{,}57)$, dada por $f(x) = x - e^{-x}$, por um polinômio de grau 2 no intervalo $[0,1]$

Tabela utilizada no exemplo 1

x	0	0,5	1,0
$f(x)$	-1	-0,11	0,63

$$|E_T(x)| \leq \left| \frac{(x-0)(x-0,5)(x-1)}{3!} \right| . \max_{0 \leq c \leq 1,0} |f'''(c)| .$$

$$f(x) = x - e^{-x}$$
$$f'(x) = 1 + e^{-x}$$
$$f''(x) = -e^{-x}$$
$$f'''(x) = e^{-x}$$

$$\max_{0 \leq c \leq 1,0} |f'''(c)| = \max_{0 \leq c \leq 1,0} \left| \frac{1}{e^c} \right| = \frac{1}{e^0} = 1$$

$$|E_T(0,57)| \leq \left| \frac{(0,57-0)(0,57-0,5)(0,57-1)}{3!} \right| . 1 \cong 0,0029 < 0,003$$

Exercício:

São dadas 2 tabelas para $f(x) = x\,[1 - \ln x]$

Se desejamos calcular $f(0,22)$ através de uma interpolação quadrática, qual tabela devemos utilizar para obter melhor aproximação ?

tabela 1

x	$f(x)$
0,05	0,200
0,15	0,435
0,25	0,597

tabela 2

x	$f(x)$
0,2	0,597
0,3	0,661
0,5	0,847

$$|E_T(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} \right| \cdot \max_{x_0<c<x_2} |f'''(c)|$$

$$f(x) = x\,(1-\ln(x))$$

$$f'(x) = 1-\ln(x) + x.\left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{x^2}$$

Para tabela 1

$$|Et(0{,}22)| \leq \left| \frac{(0{,}22-0{,}05)(0{,}22-0{,}15)(0{,}22-0{,}25)}{3!} \right| \cdot \max_{0{,}05 \leq c \leq 0{,}25} \left| \frac{1}{c^2} \right|$$

$$|E_T(0{,}22)| \leq 0{,}0238 < 0{,}03$$

Para tabela 2

$$|Et(0{,}22)| \leq \left| \frac{(0{,}22-0{,}2)(0{,}22-0{,}3)(0{,}22-0{,}5)}{3!} \right| \cdot \max_{0{,}2<c<0{,}5} \left| \frac{1}{0{,}2^2} \right|$$

$$|Et(0{,}22)| \leq 0{,}0019 < 0{,}002$$

Melhor aproximação obtida será obtida com os dados da tabela 2

Interpolação Polinomial de Newton

→ o grau do polinômio de Newton, em geral, é menor do que o grau do polinômio de Lagrange.

→ Requer que os pontos $(x_i, f(x_i))$ sejam tais que $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots x_n - x_{n-1}$

I- Para escrever o polinômio interpolador de Newton é necessário montar a tabela de diferenças

Função Diferença:

ordem 1: $\Delta f(x_i) = f(x_i+1) - f(x_i)$
ordem 2: $\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_i+1) - \Delta f(x_i)$
ordem 3: $\Delta^3 f(x_i) = \Delta^2 f(x_i+1) - \Delta^2 f(x_i)$
⋮
ordem n: $\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_i+1) - \Delta^{n-1} f(x_i)$

Exemplos:

1-) Construa a tabela de diferenças para $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, com passo $h = 1$ no intervalo $[-2, 2]$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-2	-44	28	-18	12	0
-1	-16	10	-6	12	
0	-6	4	6		
1	-2	10			
2	8				

2-) Construir a tabela de diferença para a função dada pelos pontos da tabela abaixo:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1,000	1,105	1,221	1,350	1,492	1,649

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	0	1,000	0,105	0,011	0,002	-0,002	0,004
1	0,1	1,105	0,116	0,013	0,000	0,002	
2	0,2	1,221	0,129	0,013	0,002		
3	0,3	1,350	0,142	0,015			
4	0,4	1,492	0,157				
5	0,5	1,649					
	$\lvert \mathcal{E}_a \rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016

Observe que os valores dos diferenças de ordem 4, alternam o sinal e a diferença de ordem 5, em módulo, é maior que as diferenças de ordem 4. Provavelmente isto acontece devido a propagação dos erros de arredondamento.

O erro máximo na 2ª coluna pode ser determinado por:

$$\lvert \mathcal{E}_a \rvert \leq \frac{0{,}001}{2} = 0{,}0005$$

Na última linha da tabela de diferenças temos a propagação do erro de arredondamento.

Obsereve que $\lvert \Delta^3 f(x) \rvert \underbrace{\leq 0{,}004 = \mathcal{E}_a}$ → erro máximo admitido no cálculo

$$|ET(x)| \leq \left| \frac{(0,2-0)(0,2-0,3)(0,2-0,5)(0,2-0,9)}{4!} \right| . 9,9e^{0,9}$$

$$\leq 0,002109 \leq 0,003$$

t(tempo em min)	0	6	?	10
T(Temp. em °C)	25	50	70	100

$$p(x) = \frac{(x-6)(x-10)}{(0-6)(0-10)} . 25 + \frac{(x-0)(x-10)}{(6-0)(6-10)} . 50 + \frac{(x-0)(x-6)}{(10-0)(10-6)} . 100$$

$$= \frac{x^2+16x+60}{60} . 25 + \frac{x^2-10x}{-24} . 50 + \frac{x^2-6x}{40} . 100$$

$$= x^2\left(\frac{25}{60} - \frac{50}{24} + \frac{100}{40} \right) + x\left(\frac{+16.25}{60} + \frac{500}{24} - \frac{600}{40} \right) + 25$$

$$= \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 25$$

$$p(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 25 = 70$$

$$\therefore \quad x_1 = 7,865 \quad x_2 = \cancel{-6,865}$$

$$t = 7,865$$

Interpolação Polinomial de Newton

(Requer que o passo seja constante)

- Construa a tabela de diferenças para $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, com passo $h = 1$ no intervalo $[-2,2]$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-2	-44	28	-18	12	0
-1	-16	10	-6	12	
0	-6	4	6		
1	-2	10			
2	8				

- Construir a tabela de diferença para a função dada pelos pontos da tabela abaixo.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1,000	1,105	1,221	1,350	1,492	1,649

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	0,0	1,000	0,105	0,011	0,002	-0,002	0,004
1	0,1	1,105	0,116	0,013	0	0,002	
2	0,2	1,221	0,129	0,013	0,002		
3	0,3	1,350	0,142	0,015			
4	0,4	1,492	0,157				
5	0,5	1,649					
	$\lvert E_a \rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016

Então os valores dessa coluna não tem significado. Desconsidere essa coluna e as subsequentes.

Fica assim, definido o grau do polinômio interpolador de Newton. Neste caso, grau 2.

II- Polinômio interpolador de Newton.

Se o passo h for constante, diferença de 1, devemos efetuar uma mudança de variável

$x = at + b$, onde a e b devem ser determinados.

$$\boxed{\begin{array}{l} p(t) = f(0) + \Delta f(0).t + \dfrac{\Delta^2 f(0)}{2!} t(t-1) + \dfrac{\Delta^3 f(0)}{3!} t(t-1)(t-2) + \dfrac{\Delta^4 f(0)}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3) \dots \\ \text{onde:} \quad t = \dfrac{x-b}{a} \end{array}}$$

Exemplo: Escreva o polinômio interpolador de Newton para os dados do exemplo 2.

- → passo $h = 0,1$ (constante)
- → construir a tabela de diferenças
- → vimos que o grau do polinômio é 2
- → Como $h \neq 1$ (passo não é unitório), devemos fazer uma mudança de variável: $x = at + b$

Para $x = 0$ temos $t = 0$ $\quad 0 = a.0 + b \quad \therefore b = 0$

Para $x = 0,1$ temos $t = 1$ $\quad 0,1 = a.1 + 0 \quad \therefore a = 0,1$

$$\boxed{x = 0,1t}$$

Polinômio interpolador de Newton

$p(t) = 1 + 0{,}105t + \frac{0{,}011}{2!} t(t-1)$

$= 1 + 0{,}105t + 0{,}0055t^2 - 0{,}0055t$

$p(t) = 1 + 0{,}0995t + 0{,}0055t^2$, onde $t = \frac{x}{0{,}1}$

Exercício: Deseja-se utilizar a tabela para obter uma aproximação de $f(2{,}61)$, através da interpolação -> passo const. $h = 0{,}5$

x	2	2,5	3,0	3,5	4,0
$f(x)$	0,69	0,92	1,10	1,25	1,39

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2,0	0,69	0,23	-0,05	0,02	0
0	2,5	0,92	0,18	-0,03	0,02	
1	3,0	1,10	0,15	-0,01		
2	3,5	1,25	0,14			
3	4,0	1,39				
$\lvert \varepsilon_a \rvert \leq$		0,005	0,01	0,02	0,04	0,08

$x = at + b$

Para $x = 2{,}5$ e $t = 0$ $\quad 2{,}5 = a.0 + b \therefore b = 2{,}5$ $\quad \underline{x = 0{,}5t + 2{,}5}$

Para $x = 3{,}0$ e $t = 1$ $\quad 3{,}0 = a.1 + 2{,}5 \therefore a = 0{,}5$

$p(t) = 0{,}92 + 0{,}18t - \frac{0{,}03}{2!} t(t-1)$

$p(t) = 0{,}92 + 0{,}195t - 0{,}015t^2$; onde $t = \frac{x - 2{,}5}{0{,}5}$

$f(2{,}61) \cong p(0{,}22) = \underline{0{,}962}$

Interpolação Polinomial
(Erro de truncamento)

Dada a tabela de $(n+1)$ pontos

x	x_0	x_i	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

$$|E_T(x)| = \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq c \leq x_n} |f^{(n+1)}(c)|$$

Quando usamos o polinômio interpolador de Newton é possível delimitar o erro de truncamento por:

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq c \leq x_n} \frac{|\Delta^{n+1} f(c)|}{h^{n+1}} \quad ,$$

onde $h = x_i - x_{i-1}$

↳ passo constante

Exemplos

1) Dada a tabela

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	0,841	0,935	1,021	1,099	1,166	1,222

a) Usando a fórmula de Newton calcular um valor aproximado de $f(1,13)$

b) Dê uma delimitação para o erro de truncamento nesse calculo a)

	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
-1	1,0	0,841	0,094	-0,008	0	-0,003	0,006
0	1,1	0,935	0,086	-0,008	-0,003	0,003	
1	1,2	1,021	0,078	-0,011	0		
2	1,3	1,099	0,067	-0,011			
3	1,4	1,166	0,056				
4	1,5	1,222					
	$\lvert E_a \rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016

grau do polinômio interpolador de Newton é 2, pois $|\Delta^3| f(x) \leq 0{,}004$ para $x \in \{1{,}0; 1{,}1; 1{,}2\}$

Como $h \neq 1$, vamos efetuar uma mudança de variável

$x = at + b$

Para $x = 1{,}1 \to t = 0$ Para $x = 1{,}2 \to t = 1$

$1{,}1 = b$ $1{,}2 = a + 1{,}1 \quad \therefore \quad a = 0{,}1$

$x = 0{,}1t + 1{,}1 \Rightarrow t = \dfrac{x - 1{,}1}{0{,}1}$

Polinômio Interpolador de Newton

$$p(t) = f(0) + \Delta f(0)\,t + \frac{\Delta^2 f(0)}{2!}\,t(t-1)$$

$$p(t) = 0{,}935 + 0{,}086t - \frac{0{,}008}{2}\,t(t-1) \quad \text{onde} \quad t = \frac{x - 1{,}1}{0{,}1}$$

Para $x = 1{,}13$ temos

$$t = \frac{1{,}13 - 1{,}1}{0{,}1} = 0{,}3 \qquad f(0{,}3) \cong p(0{,}3) = 0{,}96164 \cong 0{,}960$$

b)

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-1,1)(x-1,2)(x-1,3)|}{3!} \max_{1,1 \leq x \leq 1,3} \frac{|\Delta^3 f(x)|}{(0,1)^3}$$

$$|E_T(1,13)| \leq \frac{|(1,13-1,1)(1,13-1,2)(1,13-1,3)|}{6} \max \left\{ \frac{|-0,003|, |0,0001|}{(0,1)^3} \right\}$$

$$|E_T(1,13)| \leq 0,0001785 < 0,0002$$

2) Dada a tabela abaixo calcular $f(0,4)$ pela fórmula da interpolação de Newton sabendo que $\Delta f(1) = 0,140$ $\Delta^2 f(2) = 0,019$ Delimite o erro de truncamento

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1,000	$f(1)$	1,258	$f(3)$	1,597

$\downarrow$

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-2	0	1,000	0,118	0,022	-0,002	0,001
-1	1	1,118	0,140	0,02	-0,001	
0	2	1,258	0,160	0,019		
1	3	1,418	0,179			
2	4	1,597				
$\lvert\varepsilon_a\rvert \leq$		0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008

$\Delta f(1) = f(2) - f(1)$ $\therefore f(1) = 1,18$

$0,140 = 1,258 - f(1)$

$\Delta^2 f(2) = \Delta f(3) - \Delta f(2)$

$= [f(4) - f(3)] - [f(3) - f(2)]$

$\Delta^2 f(2) = f(4) - 2f(3) - f(2)$

$$f(3) = \frac{f(4) + f(2) - \Delta^2 f(2)}{2} = \frac{1,597 + 1,258 - 0,019}{2} = 1,418$$

$p(x) = f(0) + \Delta f(0)\, x + \frac{\Delta^2 f(0)}{2!} x(x-1)$

$p(x) = 1 + 0{,}118\, x + 0{,}011\, x(x-1)$

$f(0{,}4) \cong p(4) = 1{,}04456$

$|Et(0{,}4)| = \frac{|(0{,}4-0)(0{,}4-1)(0{,}4-2)|}{3!} \max\{|-0{,}002| \underset{13}{,} |-0{,}001|\}$

$|Et(0{,}4)| = 0{,}000128 < 0{,}0002$

3) Usando a tabela diferenças do exemplo anterior determine um valor aproximado para f(2,3). Delimite o erro de truncamento nesse cálculo

$p(t) = 1{,}258 + 0{,}16t + \frac{0{,}019}{2!} t(t-1)$; Onde $t = x-2$

$p(x) = 1{,}258 + 0{,}16(x+2) + \frac{0{,}019}{2}(x+2)(x-3)$

$f(2{,}3) \cong p(2{,}3) =$ ___

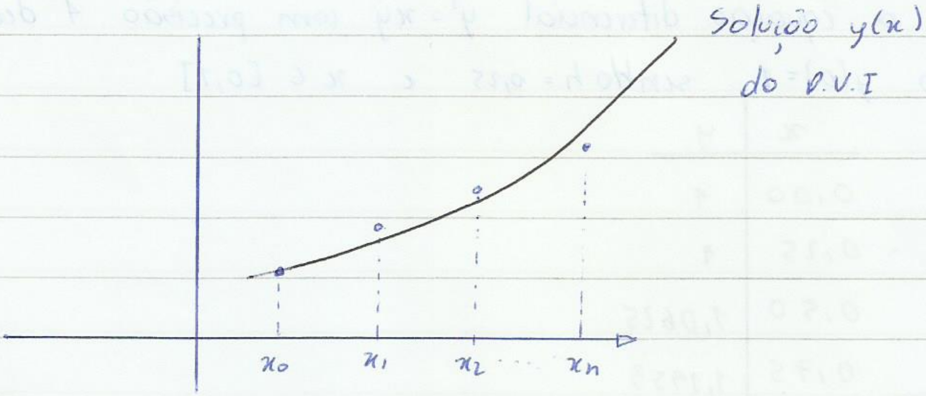
"Não é possível delimitar o erro de truncamento por falta de dado na tabela

Métodos Numéricos para resolver Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem com condição inicial

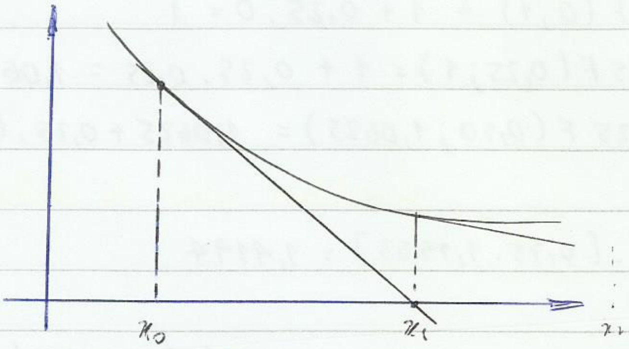
Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Resolva o P.V.I através de métodos numéricos é determinar valores aproximados para $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$



Método de Euler



$$y'(x_1) = tg\theta = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Se $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$

$$y'(x_1) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

/ /

então $y'(x+h) = \dfrac{y(x+h)-y(x)}{h}$

$$F(x+y) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + h\,F(x,y)} \rightarrow \text{Método de Euler}$$

Exemplo:

1) Resolva a equação diferencial $y' = xy$ com precisão 4 decimais, com a condição $y(0)=1$ sendo $h = 0{,}25$ e $x \in [0,1]$

x	y
0,00	1
0,25	1
0,50	1,0625
0,75	1,1953
1,00	1,4194

$y(0{,}25) = y(0) + 0{,}25 . F(0,1) = 1 + 0{,}25 . 0 = 1$

$y(0{,}50) = y(0{,}25) + 0{,}25\,F(0{,}25;1) = 1 + 0{,}25 . 0{,}25 = 1{,}0625$

$y(0{,}75) = y(0{,}50) + 0{,}25\,F(0{,}50;1{,}0625) = 1{,}0625 + 0{,}25.(0{,}5 . 1{,}0625)$

$= 1{,}1953$

$y(1) = 1{,}1953 + 0{,}25.[0{,}75 . 1{,}1953] = 1{,}4194$

2) Resolva o PVI do ex 1, usando o método analítico

$y' = xy$

$\dfrac{dy}{dx} = xy$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$

$\ln|y| = \dfrac{x^2}{2} + c$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2}+c}$

$\boxed{y = e^{\frac{x^2}{2}+c}}$ Solução Geral

Como $y(0)=1$ temos:

$y(0) = e^{\frac{0^2}{0}+c} = 1 \Rightarrow e^c = 1$

$\ln e^c = \ln 1$

$c \ln e = \ln 1$

$\underline{c = 0}$

Solução do P.V.I: $y = e^{x^2/2}$

x	y (com 4 decimais)
0,00	1,000
0,25	1,0317
0,50	1,1331
0,75	1,3248
1,00	1,6487

Obs: Comparando os valores obtidos no exemplo 1 com os do exemplo 2, observamos um erro que normalmente não é aceitável.

Para diminuir a grandeza do erro podemos diminuir o incremento h, ou usar um método mais preciso.

Método de Euler Modificado

Considere P.V.I:

$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$k_1 = F(x,y)$

$k_2 = F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$

$y(x+h) = y(x) + h k_2$

Exemplo:

1) Resolva o PVI anterior usando o método de Euler modificado

Fórmulas adaptadas ao problema

$k_1 = F(x,y) = x \cdot y$

$k_2 = F\left(x + \frac{0,25}{2} ;\ y + \frac{0,25}{2} \cdot k_1\right) = (x+0,125)(y + 0,125\, k_1)$

$y(x+0,25) = y(x) + 0,25\, k_2$

x	y	k_1	k_2
0	1	0	0,125
0,25	1,0312	0,2578	0,3988
0,50	1,1309	0,5654	0,7510
0,75			
1,00			

$k_1 = 0$

$k_2 = 0,125\,(1) = 0,125$

$y(0,25) = 1 + 0,25 \cdot (0,125) = 1,0312$

$k_1 = 0,25 \cdot 1,0312 = 0,2578$

$k_2 = (0,5 + 0,125)(0,2578 + 0,125 \cdot 0,2578) = 0,3988$

$y(0,5) = 1,0312 + 0,25 \cdot 0,3988 = 1,1309$

$k_1 = 0,5 \cdot 1,1309 = 0,5654$

$k_2 = (0,5 + 0,125)(1,1309 + 0,125 \cdot 0,5654) = 0,7510$

$y(0,75) =$

Observe a tabela abaixo:

x	"Exato"	Euler	Euler modificado
0	1	1	1
0,25	1,0317	1	1,0312
0,50	1,1331	1,0625	1,1309
0,75	1,3248	1,1953	1,3186
1	1,6487	1,4194	

Uma empresa vai lançar um novo produto no mercado e quer estimar as vendas em função do tempo. Por estudos a taxa de aumento das vendas "z" (em milhões de unidades) no instante "t" (em anos) é fornecido pela equação $\frac{dz}{dt} = 0,045(50-z)$. Determinar o número de unidades para $t=5$ e $t=10$ $\Rightarrow$ $z(5)=?$ e $z(10)=?$

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = 0,045(50-z) \\ z(0)=0 \end{cases}$$

Admitindo $h=5$

/ /

→ Independente

$k_1 = F(t, z) = 0{,}045(50 - z)$

$k_2 = F\left(t + \frac{5}{2}, z + \frac{5}{2}k_1\right) = 0{,}045\left(50 - (z + 2{,}5k_1)\right) = 0{,}045\left[50 - z - 2{,}5 k_1\right]$

$z(t+5) = z(t) + 5k_2$

t	z	k_1	k_2
0	0	2,25	2,00
5	10	1,8	1,60
10	17,99		

A quantidade vendida em 5 anos é 10 milhões e em 10 anos é 18 milhões

2) Resolva o P.V.I $\quad y' = \frac{dy}{dt}$

$$\begin{cases} y' = 1 - t + 4y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Utilizando o Euler modificado com $h = 0{,}1$. Determine um valor aproximado da solução em $t = 0{,}2$

$k_1 = F(t, y) = 1 - t + 4y$

$k_2 = F(t + 0{,}05, z + 0{,}05k_1) = = 1 - t - 0{,}05 + 4y + 0{,}2k_1$

$= 1 - t + 4y - 0{,}05 + 0{,}2k_1$

$= k_1 - 0{,}05 + 0{,}2k_1$

$k_2 = 1{,}2k_1 - 0{,}05$

$y(t + 0{,}1) = y(t) + 0{,}1k_2$

t	y	k_1	k_2
0	1	5	5,95
0,1	1,595	7,28	8,686
0,2	2,4636		

Exercícios:

1) Dada a tabela

$I = 0{,}79 + E$

$|E_T| \leq 0{,}0005$

S T_1 T_2

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,9
$\ln x$	0,69	0,79	0,86	0,96	1,06

Determinar $\int_{2,0}^{2,9} \ln(x)\,dx$, utilizando o método numérico mais adequado para se obter maior precisão. Delimite o erro de truncamento

2) Dada a EDO $y' = 2xy$ com $y(2) = 3{,}5$ pede-se determinar o valor de $y(4)$ pelo método de Euler modificado com precisão de 2 decimais

$y(4) = 213{,}5$

3) Escrever a expressão do polinômio de Newton para calcular $f(x)$ com $3{,}1 \leq x \leq 3{,}2$

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4
$f(x)$	2,010	2,134	2,270	2,422	2,592

Determine a expressão para o erro de truncamento

4) Uma viga horizontal, de 2 m, engastado perpendicularmente numa parede, suporta em sua extremidade um peso de 6 kg, a 10 cm da parede, um peso de 18 kg e a 50 cm um peso de 15 kg. Qual o máximo peso que a viga suportará a 1m? (Usar 3 decimais)

$P = 11{,}605$ kg

5) Consider a equação diferencial que descreve a temperatura de aquecimento em função do tempo.

$$\frac{dT}{dt} = T$$

t	T	k_1	k_2	k_3	k_4
0					7
2					
4					

Sabendo-se que $k_4 = 7$

Calcular a temperatura quando $t = 0$ $t = 2$ $t = 4$

Usar 2 decimais e o mét. de Runge-kutta de 4ª ordem

Respostas:

1-) I-) $\int_{2,0}^{2,4} \ln(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)\right]$

$= \frac{0,2}{3} \cdot \left[0,69 + 4 \cdot 0,79 + 0,86\right] + \text{ERRO}$

$= 0,314 + \text{Erro}1$

II-) $\int_{2.0}^{2,4} \ln(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$

$= \frac{0,2}{2}\left[0,86 + 0,96\right]$

$= 0,182 + \text{Erro}2$

III-) $\int_{2,0}^{2,4} \ln(x)\,dx = \frac{0,3}{2}\left[0,96 + 1,06\right]$

$= 0,303 + \text{Erro }3$

$I = 0,799 + \text{Erro}$

Cálculo do Erro

I) Erro 1:

$$|E_T| < \frac{h^5}{90} \max_{x_0<c<x_2} |f^{(IV)}(c)|$$

$f = \ln(x)$

$f' = x^{-1}$

$f'' = -x^{-2}$

$f''' = 2x^{-3}$

$f^{IV} = -6x^{-4}$

$$|E_T| < \frac{h^5}{90} \max_{2<c<2,4} \left| \frac{-6}{x^4} \right|$$

$$|E_T| < \frac{0,2^5}{90} \cdot \left| \frac{-6}{2^4} \right|$$

$$\therefore \ |E_T| < 1,33.10^{-6}$$

Erro 2:

$$|E_T| < \frac{h^3}{12} \max_{x_0<c<x_2} |f''c|$$

$$< \frac{0,2^3}{12} \left| \frac{-1}{2,4^2} \right| \quad \therefore \quad |E_T| < 1,157.10^{-4}$$

Erro 3:

$$|E_T| < \frac{0,3^3}{12} \left| \frac{-1}{2,6^2} \right|$$

$$|E_T| <$$

$$Erro = \Sigma |E_T| < 4,49.10^{-4} < 0,0005$$

2) $y' = 2xy$ Admitindo $h = 2$

$y(2) = 3,5$ $y(4) = ?$

$k_1 = 2xy$

$k_2 = 2.(x+1).(y+k_1)$

$y(x+2) = y(x) + 2k_2$

x	y	k_1	k_2
2	3,5	14	105
4	213,5		

$\underline{y(4) = 213,5}$

3)

t	x	y	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	$\Delta^4 f(x_0)$
-1	3,0	2,010	0,124	0,012	0,004	-0,002
0	3,1	2,134	0,136	0,016	0,002	
1	3,2	2,270	0,152	0,018		
2	3,3	2,422	0,17			
3	3,4	2,592				
	$\lvert e_0 \rvert$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008

$t = ax + b$

$\begin{cases} 0 = a.3,1 + b \\ 1 = a.3,2 + b \end{cases}$

$\begin{cases} b + 3,1a = 0 \\ -b - 3,2a = -1 \end{cases}$

$-0,1a = -1$

$a = 10$

$b = -3,1.a$

$b = -3,1.10 = -31$

$\therefore t = 10x - 31$ $\therefore x = \dfrac{t+31}{10}$

$$P(t) = 2,134 + 0,136t + \frac{0,016t(t-1)}{2}$$

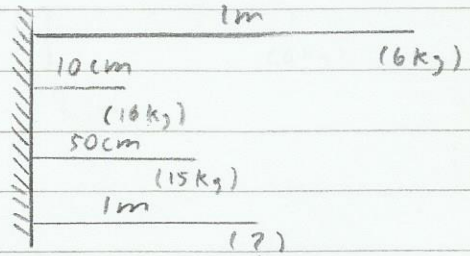
$P(t) = 2,134 + 0,136t + 0,008t(t-1)$; onde $t = 10x - 31$

$$|E_T| = \frac{|(x-3,1)(x-3,2)(x-3,3)|}{3!} \max_{3,1 \leq x \leq 3,2} \frac{|\Delta^3 f(x)|}{0,1^3}$$

$$\leq \frac{|(x-3,1)(x-3,2)(x-3,3)|}{6} \cdot \frac{0,002}{0,1^3}$$

$$\leq 3\,|(x-3,1)(x-3,2)(x-3,3)|$$

4-)



S	0,1	0,5	1,0	2
P	18	15	x	6

Interpolação Polinomial de Lagrange

x	0	2	5
$f(x)$	2,8	3,1	5,6

$$p(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)} \cdot 2,8 + \frac{(x-0)(x-5)}{(2-0)(2-5)} \cdot 3,1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(5-0)(5-2)} \cdot 5,6$$

$$= (x^2-7x+10) \cdot 0,28 - (x^2-5x)\,0,52 + (x^2-2x)\,0,37$$

$$p(x) = 0,13x^2 - 0,1x + 2,8$$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,8	2,83	3,12	3,67	4,48	5,55

x	2	5	8
$f(x)$	1	2	6

Qual o valor de $x = ?$, quando $f(x) = 3$

$$p(x) = \frac{(x-5)(x-8)}{(2-5)(2-8)} + \frac{(x-2)(x-8)}{(5-2)(5-8)} \cdot 2 + \frac{(x-2)(x-5)}{(8-2)(8-5)} \cdot 6$$

$$= \frac{x^2-13x+40}{18} + \frac{x^2-10x+16}{-9} \cdot 2 + \frac{x^2-7x+10}{18} \cdot 6$$

$$= \frac{x^2-13x+40-4x^2+40x-64+6x^2-42x+60}{18}$$

$$p(x) = \frac{3x^2-15x+36}{18}$$

$$3 = \frac{3x^2-15x+36}{18}$$

$$\frac{3x^2-15x-18}{18} = 0$$

$$x^2-5x-6=0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} \qquad x_1 = 6 \qquad \cancel{x_2 = -1}$$

R: $f(6) = 3$

/ /

y	1	2	6
x	2	5	8

$$p(y) = \frac{(y-2)(y-6)}{(1-2)(1-6)} \cdot 2 + \frac{(y-1)(y-6)}{(2-1)(2-6)} \cdot 5 + \frac{(y-1)(y-2)}{(6-1)(6-2)} \cdot 6$$

$$p(3) = \underline{7,1}$$

x	-1	0	1,5
f(x)	14,5	7,5	4,5

$$p(x) = \frac{(x-0)(x-1,5)}{(-1-0)(-1-1,5)} \cdot 14,5 + \frac{(x+1)(x-1,5)}{(0+1)(0-1,5)} \cdot 7,5 + \frac{(x+1)(x-0)}{(1,5+1)(1,5-0)} \cdot 4,5$$

$$= \frac{x^2-1,5x}{2,5} \cdot 14,5 + \frac{x^2-0,5x-1,5}{-1,5} \cdot 7,5 + \frac{x^2+x}{3,75} \cdot 4,5$$

$$= \frac{750x^2-1875x+2812,5}{375} = 2x^2-5x+7,5$$

x	1,0	1,2	1,5
f(x)	1,000	1,219	1,608

$f(1,15) = ?$

$$p(x) = \frac{(x-1,2)(x-1,5)}{(1,0-1,2)(1,0-1,5)} \cdot 1 + \frac{(x-1,0)(x-1,5)}{(1,2-1,0)(1,2-1,5)} \cdot 1,219 + \frac{(x-1,0)(x-1,2)}{(1,5-1,0)(1,5-1,2)} \cdot 1,608$$

$$p(1,15) = 0,175 + 1,066625 - 0,0804 =$$

$$p(1,15) = \underline{1,161225}$$

x	2	5	8
$f(x)$	1	2	6

$f(x)=3\ ?$

$$p(x)=\frac{(x-5)(x-8)}{(2-5)(2-8)}+\frac{(x-2)(x-8)}{(5-2)(5-8)}.2+\frac{(x-2)(x-5)}{(8-2)(8-5)}.6$$

$$=\frac{x^2-13x+40}{18}+\frac{x^2-10x+16}{-6}.2+\frac{x^2-7x+10}{18}.6$$

$$p(x)=\frac{x^2-5x+12}{6} \qquad \frac{x^2-5x+12}{6}=3$$

$$x_1=6 \quad \cancel{x_2=-1} \qquad \underline{f(6)=3}$$

x	0	0,5	1
$f(x)$	-1	-0,11	0,63

Sendo $f(x)=x-e^{-x}=0$, que admite raiz no intervalo $[0,1]$

$$p(x)=\frac{(x-0,5)(x-1)}{(0-0,5)(0-1)}.(-1)+\frac{(x-0)(x-1)}{(0,5-0)(0,5-1)}.(-0,11)+\frac{(x-0)(x-0,5)}{(1-0)(1-0,5)}.0,63$$

$$=\frac{x^2-1,5x+0,5}{0,5}.(-1)+\frac{x^2-x}{-0,25}.(-0,11)+\frac{x^2-0,5x}{0,5}.0,63$$

$$=x^2\left(-2+\frac{0,11}{0,25}+\frac{0,63}{0,5}\right)+x\left(3-\frac{0,11}{0,25}-0,63\right)-1$$

$$=-0,3x^2+1,93x-1$$

$$p(x)=0$$
$$-0,3x^2+1,93x-1=0$$

$$\underline{x_1=0,57} \qquad x_2=\cancel{5,86}$$

Peso (kg)	25	45	65	(IDADE)
50	2500	2350	1950	
60	2850	2700	2250	
70	3200	3000	2550	
80	3550	3350	2800	

Qual a cota aproximada de calorias para um homem de 65 kg e 30 anos

Peso	60	70
Calorias	2850	3200

$$p(x) = \frac{(x-70)}{(60-70)} \cdot 2850 + \frac{(x-60)}{(70-60)} \cdot 3200$$

$$= (x-70) \cdot (-285) + (x-60) \cdot 320$$

$p(x) = 35x + 750$

$p(65) = 3025$

Peso	60	65	70
Calorias	2850	3025	3200

Peso	60	70
Calorias	2700	3000

$$p(x) = \frac{(x-70)}{(60-70)} \cdot 2700 + \frac{(x-60)}{(70-60)} \cdot 3000$$

$$= (x-70)(-270) + (x-60) \cdot 300$$

$p(x) = 30x + 900$

$p(65) = 2850$

Peso	60	65	70
Calorias	2700	2850	3000

	25	45
65	3025	2850

$$p(x) = \frac{(x-45)}{(25-45)} . 3025 + \frac{(x-25)}{(45-25)} . 2650$$

$$= -151,25x + 6806,25 + 142,5x - 3562,5$$

$$p(x) = -8,75x + 3243,75$$

$$p(30) = \underline{2981,25}$$

Termo Complementar da Interpolação

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq c \leq x_n} |f^{n+1}(c)|$$

x	0	0,5	1,0
$f(x)$	-1	-0,11	0,63

Delimite o erro de truncamento ao aproximar $f(0,57)$, por $f(x) = x - e^{-x}$

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-0)(x-0,5)(x-1,0)|}{3!} \max_{0 \leq c \leq 1,0} |f'''(c)|$$

$$f(x) = x - e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 + e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x}$$

$$f'''(x) = e^{-x}$$

$$\max_{0 \leq c \leq 1} |f'''(c)| = \max_{0 \leq c \leq 1} \left| \frac{1}{e^x} \right| = \frac{1}{e^0} = 1$$

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(0,57-0)(0,57-0,5)(0,57-1,0)|}{3!} . 1 \leq 0,00286 \leq \underline{0,003}$$

x	$f(x)$
0,05	0,200
0,15	0,435
0,25	0,597

$f(x) = x[1-\ln x]$

$f(0,22) = ?$

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-0{,}05)(x-0{,}15)(x-0{,}25)|}{3!} \max_{0{,}05 \leq c \leq 0{,}25} |f'''(c)|$$

$f(x) = x[1-\ln x]$

$f'(x) = (1-\ln x) + x \cdot -\dfrac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

$f''(x) = -x^{-1}$

$f'''(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

$$\max_{0{,}05 \leq c \leq 0{,}25} \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{0{,}05^2} = 400$$

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(0{,}22-0{,}05)(0{,}22-0{,}15)(0{,}22-0{,}25)|}{3!} \cdot 400$$

$\leq 0{,}0238 \leq \underline{0{,}03}$

x	$f(x)$
0,2	0,597
0,3	0,661
0,5	0,847

$f(x) = x[1-\ln x]$

$f(0,22) = ?$

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-0{,}2)(x-0{,}3)(x-0{,}5)|}{3!} \max_{0{,}2 \leq c \leq 0{,}5} |f'''(c)|$$

$f(x) = x[1 - \ln x]$

$f'(x) = (1 - \ln x) + x \cdot \frac{(-1)}{x} = -\ln x$

$f''(x) = -x^{-1}$

$f'''(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$$\max_{0{,}2 \le c \le 0{,}5} \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{0{,}2^2} = 25$$

$$|ET(x)| \le \frac{|(0{,}22-0{,}2)(0{,}22-0{,}3)(0{,}22-0{,}5)|}{3!} \cdot 25$$

$$\le 0{,}00187 \le \underline{0{,}002}$$

Delimitar o erro de truncamento cometido no calculo do valor aproximado de $f(1{,}15)$, supondo que $f(x) = x\ln(x) + 1$ (Obs: Polinômio Grau 2) e $[1;1{,}5]$

x	1	1,25	1,5
$f(x)$	1	1,28	0,61

$$|ET(x)| \le \frac{|(x-1{,}0)(x-1{,}25)(x-1{,}5)|}{3!} \max_{1 \le c \le 1{,}5} |f'''(c)|$$

$f(x) = x\ln(x) + 1$

$f'(x) = \ln(x) + 1 + 1 = \ln(x) + 2$ $\quad \max_{1 \le c \le 1{,}5} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = 1$

$f''(x) = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2}$

$$|ET(x)| \le \frac{|(1{,}15-1)(1{,}15-1{,}25)(1{,}15-1{,}5)|}{3!} \le 0{,}00875 \le 0{,}009$$

/ /

x	0	0,3	0,5	0,9
$f(x)$	2,0000	2,4050	2,8244	4,2136

a-) $f(0,2) = ?$ pelo método de Lagrange

b-) Delimitação do erro de truncamento, supondo que $f(x) = xe^x + 2$

c-) Delimitação do erro de ~~arredondamento~~

d-) Delimitação ~~do erro~~ global

~~e-) Apresentação~~ do resultado final

a-)

$$p(x) = \frac{(x-0,3)(x-0,5)(x-0,9)}{(0-0,3)(0-0,5)(0-0,9)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-0,5)(x-0,9)}{(0,3-0)(0,3-0,5)(0,3-0,9)} \cdot 2,4050 + \frac{(x-0)(x-0,3)(x-0,9)}{(0,5-0)(0,5-0,3)(0,5-0,9)} \cdot 2,8244 + \frac{(x-0)(x-0,3)(x-0,5)}{(0,9-0)(0,9-0,3)(0,9-0,5)} \cdot 4,2136$$

$\therefore p(0,2) = 2,2454489...$

b-) $$|Et(x)| \leq \frac{|(x-0)(x-0,3)(x-0,5)(x-0,9)|}{4!} \max_{0 \leq c \leq 0,9} |f^{IV}(c)|$$

$f(x) = xe^x + 2$

$f'(x) = e^x + xe^x$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x \quad 2e^x + xe^x$

$f'''(x) = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$

$f^{IV}(x) = 3e^x + e^x + xe^x = 4e^x + xe^x$

$= e^x(4+x)$

$\max_{0 \leq c \leq 0,9} |e^x(4+x)|$

$e^{0,9}(4+0,9) = 4,9e^{0,9}$

$$p(t) = f(0) + \Delta f(0)t + \frac{\Delta^2 f(0)t(t-1)}{2!} + \frac{\Delta^3 f(0)t(t-1)(t-2)}{3!} + \frac{\Delta^4 f(0)t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}$$

onde $t = \frac{x-b}{a}$

$x = at + b$

$\begin{cases} 0 = a.0 + b \\ 0,1 = a + b \end{cases}$ $\therefore$ $b=0$ e $a=0,1$

$x = 0,1t$

$p(t) = 1 + 0,105t + \frac{0,011\,t(t-1)}{2}$

$\therefore$ $p(t) = 1 + 0,105t + 0,0055t^2 - 0,0055t$

$p(t) = 1 + 0,0995t + 0,0055t^2$, onde $x = 0,1t$

x	2	2,5	3,0	3,5	4,0
$f(x)$	0,69	0,92	1,10	1,25	1,39

Obter uma aproximação de $f(2,61) = ?$

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-1	2	0,69	0,23	-0,05	0,02	0
0	2,5	0,92	0,18	-0,03	0,02	
1	3	1,10	0,15	-0,01		
2	3,5	1,25	0,14			
3	4	1,39				
	$\lvert\varepsilon_a\rvert \leq$	0,005	0,01	0,02	0,04	0,08

$x = at + b$

Para $x = 2,5$

$2,5 = a.0 + b \quad \therefore \quad b = 2,5$

Para $x = 3,0$

$3,0 = a + b \quad \therefore \quad a = 3 - b = 3 - 2,5 = 0,5$

$x = 0,5\,t + 2,5 \qquad t = \dfrac{x - 2,5}{0,5}$

$p(t) = 0,92 + 0,18\,t \underline{- 0,03\,t(t-1)}$
$\quad 2$

$\therefore \; p(t) = 0,92 + 0,18\,t - \dfrac{0,015\,t(t-1)}{2} \;;$ onde $t = \dfrac{x-2,5}{0,5}$

$f(2,61) \simeq p(0,22) = 0,960887$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,50	2,60	2,80	3,10	3,50	4,00	4,60

$f(0,8) = ?$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	2,50	0,10	0,10	0
1	2,60	0,20	0,10	0
2	2,80	0,30	0,10	0
3	3,10	0,40	0,10	0
4	3,50	0,50	0,10	
5	4,00	0,60		
6	4,60			
$\lvert \varepsilon_a \rvert \leq$	0,005	0,01	0,02	0,04

$p(x) = 2,50 + 0,10\,x + \dfrac{0,10\,x(x-1)}{2} +$ erro

$p(x) = 0,05\,x^2 + 0,05\,x + 2,5 +$ erro

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	x
$f(x)$	3,000	3,219	3,471	3,752	4,058	4,386	4,735	$f(1{,}54) = ?$

	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
	1,0	3,000	0,219	0,033	~~-0,004~~
	1,2	3,219	0,252	0,029	~~-0,004~~
0	1,4	3,471	0,281	0,025	~~-0,003~~
1	1,6	3,752	0,306	0,022	~~-0,001~~
	1,8	4,058	0,328	0,021	
	2,0	4,386	0,349		
	2,2	4,735			
	$\lvert \varepsilon_a \rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004

$x = at + b \rightarrow 1{,}4 = a.0 + b \quad \therefore b = 1{,}4$

$1{,}6 = a + b \quad \therefore a = 0{,}2$

$\underline{x = 0{,}2t + 1{,}4}$

$$P(t) = 3{,}471 + 0{,}281t + \frac{0{,}025\, t(t-1)}{2}$$

$\therefore \quad p(t) = 0{,}0125t^2 + 0{,}2685t + 3{,}471$

onde $\quad x = 0{,}2t + 1{,}4$

Delimitação do erro de truncamento para a fórmula de Interpolação de Newton

$$|E_T(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq c \leq x_n} \frac{|\Delta^{n+1} f(c)|}{h^{n+1}}$$

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
$f(x)$	0,841	0,935	1,021	1,099	1,166	1,222	$f(1,13) = ?$

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1	1,0	0,841	0,094	-0,008	0
0	1,1	0,935	0,086	-0,008	-0,003
1	1,2	1,021	0,078	-0,011	0
2	1,3	1,099	0,067	-0,011	
3	1,4	1,166	0,056		
4	1,5	1,222			
	$\lvert\varepsilon_a\rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004

$x = at + b \rightarrow 1{,}1 = a.0 + b \quad \therefore b = 1{,}1$

$1{,}2 = a + b \quad a = 0{,}1$

$\underline{x = 0{,}1t + 1{,}1}$

$p(t) = 0{,}935 + 0{,}086t - 0{,}004t(t-1)$

$\therefore p(t) = -0{,}004t^2 + 0{,}09t + 0{,}935$; Onde $x = 0{,}1t + 1{,}1$

$$|Et(x)| = \left| \frac{(x-1)(x-1{,}1)(x-1{,}2)(x-1{,}3)}{3!} \right| \max_{1 \leq c \leq 1{,}5} \frac{|\Delta^3 f(x)|}{h^3}$$

$$\max_{1 \leq c \leq 1{,}5} \left\{ \frac{|-0{,}003|, |0{,}000|}{(0{,}1)^3} \right\} = 3$$

$$|Et(x)| = \left| \frac{(1{,}13-1{,}1)(1{,}13-1{,}2)(1{,}13-1{,}3)}{3!} \right| . 3$$

$|Et(x)| \lessapprox 0{,}0001785 < 0{,}0002$

- Dada a tabela abaixo calcular $f(0,4)$ pela fórmula da interpolação de Newton sabendo que $\Delta f(1) = 0{,}140$ $\Delta^2 f(2) = 0{,}019$ Delimite o erro de truncamento

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1,000	$f(1)$	1,258	$f(3)$	1,597

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(3)$	$\Delta^4 f(4)$
0	1,000	0,118	0,022	-0,002	0,021
1	1,118	0,140	0,02	0,019	
2	1,258	0,16	0,019		
3	1,418	0,179			
4	1,597				
$\lvert e_a \rvert \le$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008

$$\Delta f(1) = f(2) - f(1)$$

$$0{,}140 = 1{,}258 - f(1) \quad \therefore \quad f(1) = 1{,}118$$

$$\Delta^2 f(1) = \Delta f(2) - \Delta f(1)$$

$$= [f(3) - f(2)] - [f(2) - f(1)]$$

$$= [f(3) - 1{,}258] - [1{,}258 - 1{,}118]$$

$$\Delta^2 f(2) = \Delta f(3) - \Delta f(2)$$

$$= [f(4) - f(3)] - [f(3) - f(2)]$$

$$\Delta^2 f(2) = f(4) - 2f(3) + f(2)$$

$$\therefore f(3) = \frac{f(4) + f(2) - \Delta^2 f(2)}{2}$$

$$f(3) = \frac{1{,}597 + 1{,}258 - 0{,}019}{2} = 1{,}418$$

$p(x) = 1 + 0{,}118x + 0{,}011x(x-1)$

$p(0{,}4) = 1{,}04456$

$$|Et(x)| \le \frac{|(x-0)(x-1)(x-2)|}{3!} \max_{0 \le c \le 2} \frac{|\Delta^3 f(x)|}{h^3}$$

$$\max_{0 \le c \le 2} \left\{ \frac{|-0{,}002 , 0{,}000|}{1^3} \right\} = 0{,}002$$

$|Et(x)| \le 0{,}000128 < 0{,}0002$

$x = 0 \rightarrow t = -2$

$x = 2 + t$

E $f(2{,}3) = ?$

$p(t) = 1{,}258 + 0{,}16t + 0{,}0095t(t-1)$ $\quad t = x - 2$

$f(2{,}3) = p(0{,}3) = 1{,}304005$

"Não é possível delimitar o erro de truncamento por falta de dado na tabela".

x	0,7	0,9	1,0
$f(x)$	-0,59	0,21	0,72

$$p(x) = \frac{(x-0{,}9)(x-1)}{(0{,}7-0{,}9(0{,}7-1))} \cdot (-0{,}59) + \frac{(x-0{,}7)(x-1)}{(0{,}9-0{,}7)(0{,}9-1)} \cdot 0{,}21 +$$

$$\frac{(x-0{,}7)(x-0{,}9)}{(1-0{,}7)(1-0{,}9)} \cdot 0{,}72$$

$$= \frac{x^2 - 1{,}9x + 0{,}9}{0{,}06} \cdot (-0{,}59) + \frac{x^2 - 1{,}7x + 0{,}7}{-0{,}02} \, 0{,}21 + \frac{x^2 - 1{,}6x + 0{,}63}{0{,}03} \cdot 0{,}72$$

$$= x^2 \left(\frac{-0{,}59}{0{,}06} - \frac{0{,}21}{0{,}02} + \frac{0{,}72}{0{,}03} \right) + x \left(\frac{1{,}121}{0{,}06} + \frac{0{,}357}{0{,}02} - \frac{1{,}152}{0{,}03} \right) - \frac{0{,}531}{0{,}06} - \frac{0{,}147}{0{,}02} + \frac{0{,}4536}{0{,}03}$$

$p(x) = \frac{11}{3}x^2 - \frac{28}{15}x - \frac{27}{25} = 0$

$\underline{x_1 = 0,85} \quad x_2 = -0,34$

x	0	2	4
$f(x)$	5	-3	13

$$p(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} \cdot 5 + \frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} \cdot (-3) + \frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)} \cdot 13$$

$$= \frac{x^2-6x+8}{8} \cdot 5 + \frac{x^2-4x}{-4} \cdot -3 + \frac{x^2-2x}{8} \cdot 13$$

$$= \frac{5x^2-30x+40+6x^2-24x+13x^2-26x}{8}$$

$$= \frac{24x^2-80x+40}{8} = 3x^2-10x+5$$

$$\therefore\ p(x) = 3x^2-10x+5$$

Qual é o erro máximo ao aproximar a função f dada por $f(x)=\sqrt{x}$ no intervalo $[1,3]$?

x	1	2	3
$f(x)$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

24-)(livro)

$$x = at + b$$

Para $x = 1{,}2$ $t = 0$

$1{,}2 = b$

Para $x = 1{,}3$ $t = 1$

$1{,}3 = a + b$ $\therefore a = 0{,}1$

$x = 0{,}1t + 1{,}2$ $\therefore$ $t = \dfrac{x - 1{,}2}{0{,}1}$

$p(t) = 1{,}021 + 0{,}078t - 0{,}0055\, t(t-1)$

$f(1{,}23) \simeq p(0{,}3) = \underline{1{,}04556}$

25-)

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$f(x)$	0	0,301	0,477	0,602	0,699

$$p(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} . 0{,}301 + \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} . 0{,}477 + \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} . 0{,}602$$

$$= \frac{x^2 - 7x + 12}{2} . 0{,}301 + \frac{x^2 - 6x + 8}{-1} 0{,}477 + \frac{x^2 - 5x + 6}{2} 0{,}602$$

$$= x^2 \left(\frac{0{,}301}{2} - 0{,}477 + 0{,}301 \right) + x \left(-\frac{7 . 0{,}301}{2} + 6 . 0{,}477 - 5 . 0{,}301 \right)$$

$$+ 6 . 0{,}301 - 8 . 0{,}477 + 3 . 0{,}602$$

$$= -0{,}0255t^2 + 0{,}3035t - 1{,}04$$

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x)$	0	0,040	0,156	0,339	0,574	0,841

$f(0{,}53) = ?$

t	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-2	0	0	0,04	0,076	-0,009	-0,006
-1	0,2	0,04	0,116	0,067	-0,015	-0,005
0	0,4	0,156	0,183	0,052	-0,02	
1	0,6	0,339	0,235	0,032		
2	0,8	0,574	0,267			
3	1	0,841				
	$\lvert\varepsilon_0\rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008

$$x = at + b$$

Para $t \to 0$ $x = 0{,}4$

$0{,}4 = a.0 + b \quad \therefore \quad b = 0{,}4$ $\qquad x = 0{,}2t + 0{,}4$

Para $t \to 1$ $x = 0{,}6$ $\qquad t = \dfrac{x - 0{,}4}{0{,}2}$

$0{,}6 = a.1 + b \quad \therefore \quad a = 0{,}2$

$$p(t) = 0{,}156 + 0{,}183t + \frac{0{,}052\,t(t-1)}{2!} \frac{-0{,}02\,t(t-1)(t-2)}{3!}$$

$$f(0{,}53) \simeq p(0{,}65) = \underline{0{,}269}$$

$$|Et(x)| \leq \frac{|(x-0{,}156)(x-0{,}183)(x-0{,}052)(x+0{,}02)|}{4!} \max_{0{,}4 \leq c \leq 1)} \frac{|\Delta^4 f(c)|}{h^4}$$

$$|Et(0{,}53)| \leq \frac{|(0{,}53-0{,}156)(0{,}53-0{,}183)(0{,}53-0{,}052)(0{,}53+0{,}02)|}{4!} \cdot \frac{0{,}02}{0{,}2^4}$$

$$|Et(0{,}53)| \leq 0{,}000118 < 0{,}0002$$

(27.)

z	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(z)$	1,65	1,86	2,01	2,23	2,46	2,72

$f(z) = 2,1$

t	z	$f(z)$	$\Delta f(z)$	$\Delta^2 f(z)$	$\Delta^3 f(z)$
0	0,5	1,65	0,21	-0,06	0,13
1	0,6	1,86	0,15	0,07	-0,06
2	0,7	2,01	0,22	0,01	0,02
3	0,8	2,23	0,23	0,03	
4	0,9	2,46	0,26		
5	1,0	2,72			
	$\lvert e_a \rvert \leq$	0,005	0,01	0,02	0,04

$z = at + b$

Para $z = 0,5 \rightarrow t = 0$

$0,5 = b$

Para $z = 0,6 \rightarrow t = 1$

$0,6 = a + b \quad \therefore \quad a = 0,1$

$z = 0,1t + 0,5$

$t = \dfrac{z - 0,5}{0,1} = 10z - 5$

$$p(t) = 1,65 + 0,21t \; \frac{-0,06\,t(t-1)}{2}$$

$1,65 + 0,21t - 2,1 = 0$

$$p(t) = -0,03t^2 + 0,24t + 1,65$$
$$= -0,03(10z-5)^2 + 0,24(10z-5) + 1,65$$
$$= -3z^2 + 1,5z - 0,75 + 2,4z - 1,2 + 1,65$$

$$p(t) = -3z^2 + 3,9z - 0,3 = 2,1$$
$$-3z^2 + 3,9z - 2,4 = 0$$
$$-z^2 + 1,3z - 0,8 = 0$$

$z_1 =$

z	0,7	0,8
$f(z)$	2,01	2,23

$$p(x) = \frac{(x-0,8)}{(0,7-0,8)} \cdot 2,01 + \frac{(x-0,7)}{(0,8-0,7)} \cdot 2,23$$

$$= \frac{2,01x - 1,608}{-0,1} + \frac{2,23 - 1,561}{0,1}$$

$$= -20,1x + 16,08 + 22,3x - 15,61$$

$$p(z) = 2,2z + 0,47$$

$$2,2z + 0,47 = 2,1 \quad \therefore z = \underline{0,74091}$$

y	2,01	2,23
x	0,7	0,8

$$p(y) = \frac{(x-2,23)}{(2,01-2,23)} \cdot 0,7 + \frac{(x-2,01)}{(2,23-2,01)} \cdot 0,8$$

$$= \frac{0,7x - 1,561}{-0,22} + \frac{0,8x - 1,608}{0,22}$$

$$= x\left(\frac{-0,7}{0,22} + \frac{0,8}{0,22}\right) + \frac{1,561}{0,22} - \frac{1,608}{0,22}$$

$$p(\lambda) = \frac{5x}{11} - \frac{47}{220}$$

$$p(2,1) = \underline{0,74091}$$

28-)

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f(x)	1,000	1,1052	1,2214	1,3499	1,4918	1,6487

$f(x) = 1{,}3165$

$$p(x) = \frac{(x-0{,}3)}{(0{,}2-0{,}3)} \cdot 1{,}2214 + \frac{(x-0{,}2)}{(0{,}3-0{,}2)} \cdot 1{,}3499$$

$$= \frac{1{,}2214x - 0{,}36642}{-0{,}1} + \frac{1{,}3499x - 0{,}26998}{0{,}1}$$

$$= -12{,}214x + 3{,}6642 + 13{,}499x - 2{,}6998$$

$$p(x) = 1{,}285x + 0{,}9644$$

$$1{,}285x + 0{,}9644 = 1{,}3165$$

$$\therefore x = \underline{0{,}274}$$

y	1,2214	1,3499
x	0,2	0,3

$$p(y) = \frac{(x-1{,}3499)}{(1{,}2214-1{,}3499)} \cdot 0{,}2 + \frac{(x-1{,}2214)}{(1{,}3499-1{,}2214)} \cdot 0{,}3$$

$$= \frac{0{,}2x - 0{,}26998}{-0{,}1285} + \frac{0{,}3x - 0{,}36642}{0{,}1285}$$

$$= \frac{0{,}2x - 0{,}26998 - 0{,}3x + 0{,}366422}{-0{,}1285}$$

$$p(\lambda) = \frac{-0{,}1x + 0{,}096442}{-0{,}1285}$$

$$p(1{,}3165) = \underline{0{,}274}$$

30-)

x	0	2	5
$f(x)$	2,8	3,1	5,6

$$p(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)} . 2{,}8 + \frac{(x-0)(x-5)}{(2-0)(2-5)} . 3{,}1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(5-0)(5-2)} \, 5{,}6$$

$$= \frac{x^2-7x+10}{10} . 2{,}8 + \frac{x^2-5x}{-6} . 3{,}1 + \frac{x^2-2x}{15} . 5{,}6$$

$$= x^2\left(0{,}28 - \frac{3{,}1}{6} + \frac{5{,}6}{15}\right) + x\left(-1{,}96 + \frac{15{,}5}{6} - \frac{11{,}2}{15}\right) + 2{,}8$$

$$p(x) = 0{,}14x^2 - 0{,}12x + 2{,}8$$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,8	2,81	3,1	3,66	4,49	5,6

31)

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$f(x)$	2,997	3,218	3,471	3,752	4,058	4,386	4,735

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
1,0	2,997	0,221	0,032	-0,004	0,001	-0,001	0,003
1,5	3,218	0,253	0,028	-0,003	0	0,002	
2,0	3,471	0,281	0,015	-0,003	0,002		
2,5	3,752	0,306	0,022	-0,001			
3,0	4,058	0,328	0,021				
3,5	4,386	0,349					
4,0	4,735						
$\lvert e_a \rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016	0,032

Para $x = 1{,}5 \rightarrow t = 0$

$1{,}5 = a.0 + b \quad \therefore \quad b = 1{,}5$

Para $x = 2 \rightarrow t = 1$

$2 = a.+b \quad \therefore \quad a = 0{,}5$

$x = 0{,}5t + 1{,}5$

$$f(x) \cong p(x) = 3{,}218 + 0{,}253t + \frac{0{,}026t(t-1)}{2}$$

$$f(1{,}9) \cong p(0{,}8) = \underline{3{,}4148}$$

$$|E_t(x)| \leq \frac{|(x-1{,}5)(x-2)(x-2{,}5)|}{3!} \max_{1{,}5 \leq c \leq 2{,}5} \left| \frac{\Delta^3 f(x)}{h^3} \right|$$

$$\leq \frac{|(x-1{,}5)(x-2)(x-2{,}5)|}{6} \cdot \frac{0{,}003}{0{,}5^3}$$

$|E_t(1{,}9)| \leq 0{,}000096 < 0{,}0001$

32)

t	0	1	2	3	4
$F(t)$	1,000	$F(1)$	1,258	$F(3)$	1,597

$F(0{,}4) = ?$ $\quad \Delta F(1) = 0{,}140 \quad \Delta^2 F(2) = 0{,}019$

t	$F(t)$	$\Delta F(t)$	$\Delta^2 F(t)$	$\Delta^3 F(t)$	$\Delta^4 F(t)$
0	1,000	0,118	0,022	~~-0,002~~	~~0,001~~
1	1,118	0,140	0,02	~~-0,001~~	
2	1,258	0,16	0,019		
3	1,418	0,179			
4	1,597				
$\lvert E_a \rvert \leq$	0,0005	0,001	0,002	0,004	0,008

$\Delta F(1) = F(2) - F(1)$

$0{,}140 = 1{,}258 - F(1) \therefore F(1) = 1{,}118$

$\Delta^2 F(2) = \Delta F(3) - \Delta F(2)$

$= [F(4) - F(3)] - [F(3) - F(2)]$

$\Delta^2 F(2) = F(4) - 2F(3) + F2)$

$$\therefore F(3) = \frac{F(4) + F(2) - \Delta^2 F(2)}{2}$$

$$= \frac{1{,}597 + 1{,}258 - 0{,}019}{2} \quad \therefore \Delta^2 F(2) = 1{,}418$$

$$F(t) = 1 + 0{,}118t + \frac{0{,}022t(t-1)}{2}$$

$F(0{,}4) = \underline{1{,}04456}$

33)

x	2	2,5	3	3,5	4,0
$f(x)$	0,69	0,92	1,10	1,25	1,39

$\ln(2{,}61)$

$$P(x) = \frac{(x-2{,}5)(x-3)}{(2-2{,}5)(2-3)} .0{,}69 + \frac{(x-2)(x-3)}{(2{,}5-2)(2{,}5-3)} .0{,}92 + \frac{(x-2)(x-2{,}5)}{(3-2)(3-2{,}5)} .1{,}10$$

$$= \frac{x^2 - 5{,}5x + 7{,}5}{0{,}5} .0{,}69 + \frac{x^2 - 5x + 6}{-0{,}25} .0{,}92 + \frac{x^2 - 4{,}5x + 5}{0{,}5} .1{,}10$$

$$= \frac{x^2(0{,}69 - 1{,}84 + 1{,}10) + x(-3{,}795 + 9{,}2 - 4{,}95) + 5{,}175 - 11{,}04 + 5{,}5}{0{,}5}$$

$$= \frac{-0{,}05x^2 + 0{,}455x - 0{,}365}{0{,}5}$$

$\underline{P(2{,}61) = 0{,}96}$

1)

$f(1,5) = ?$

$D^{k} f(x) = \leq \frac{1}{x^{k}}$

x	1	2	3
$f(x)$	-2	1	-1

$$P(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} . (-2) + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} 1 + \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} . (-1)$$

$$= \frac{x^{2}-5x+6}{2} . (-2) + \frac{x^{2}-4x+3}{-1} . 1 + \frac{x^{2}-3x+2}{2} . (-1)$$

$$= \frac{-2x^{2}+10x-12-2x^{2}+8x-6-x^{2}+3x-2}{2}$$

$$= \frac{-5x^{2}+21x-20}{2}$$

$f(1,5) \simeq P(1,5) \doteq \underline{0,125}$

$$|ET(x)| \leq \frac{|(x-1)(x-2)(x-3)|}{3!} . \frac{1}{x^{3}}$$

$$|ET(1,5) = \frac{0,375}{-3!.3,375} \leq 0,0185 < 0,02$$

2) $f(x) = \ln(x)$ polinômio do 2º grau no $[3,5]$ 3 decimais

x	3	4	5
$f(x)$	1,099	1,386	1,609

$$p(x) = \frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)} . 1,099 + \frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} . 1,386 + \frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)} . 1,609$$

$$= \frac{x^{2}-9x+20}{2} . 1,099 + \frac{x^{2}-8x+15}{-1} . 1,386 + \frac{x^{2}-7x+12}{2} . 1,609$$

$$p(x) = \frac{x^{2}(1,099-2,772+1,609)+x(-9,891+22,176-11,263)+21,98-20,79+19,308}{2}$$

$$p(x) = \frac{-0{,}064x^2 + 1{,}023x + 20{,}498}{2}$$

$$p(3{,}5) = 11{,}647$$

3)

x	0	2	5
$f(x)$	0,8	1,1	3,6

$$p(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)} \cdot 0{,}8 + \frac{x(x-5)}{2(2-5)} \cdot 1{,}1 + \frac{x(x-2)}{5(5-2)} \cdot 3{,}6$$

$$= \frac{x^2-7x+10}{10} \cdot 0{,}8 + \frac{x^2-5x}{-6} \cdot 1{,}1 + \frac{x^2-2x}{15} \cdot 3{,}6$$

$$= x^2\left(0{,}08 - \frac{1{,}1}{6} + \frac{3{,}6}{15}\right) + x\left(\frac{-7 \cdot 0{,}8}{10} + \frac{5{,}5}{6} - \frac{7{,}2}{15}\right) + 0{,}8$$

$$= 0{,}1367x^2 - 0{,}123x + 0{,}8$$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,8	0,813	1,1	1,66	2,493	3,6

4) $T_0 = 25°C$ 0 min

→ 5 min $T = 50°C$

→ +5 min $T = 100°C$

min	0	5	↑	10
°C	25	50	90	100

$$p(x) = \frac{(x-5)(x-10)}{(0-5)(0-10)} \cdot 25 + \frac{x(x-10)}{5(5-10)} \cdot 50 + \frac{x(x-5)}{10(10-5)} \cdot 100$$

$$= \frac{x^2-15x+50}{50} \cdot 25 + \frac{x^2-10x}{-25} \cdot 50 + \frac{x^2-5x}{50} \cdot 100$$

$$= \frac{25x^2 - 375x + 1250 - \cancel{100x^2} + 1000x + \cancel{100x^2} - 500x}{50}$$

$$= \frac{25x^2 + 125x + 1250}{50} = \frac{x^2+5x+50}{2} = 70 \therefore \underline{x = 7{,}31 \text{ min}}$$

5)

x	0	15
$f(x)$	25	80

$$p(x) = \frac{x-15}{0-15} \cdot 25 + \frac{x}{15} \cdot 80$$

$$= \frac{80x - 25x + 375}{15} = \frac{55x + 375}{15} = \frac{11x + 75}{3}$$

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	25	36	47	58	69	80

6)

$f(x)$	18	15	?	6
(x)	0,1	0,5	1	2

$$f(x) = \frac{(x-0{,}5)(x-2)}{(0{,}1-0{,}5)(0{,}1-2)} \cdot 18 + \frac{(x-0{,}1)(x-2)}{(0{,}5-0{,}1)(0{,}5-2)} \cdot 15 + \frac{(x-0{,}1)(x-0{,}5)}{(2-0{,}1)(2-0{,}5)} \cdot 6$$

$$= \frac{x^2 - 2{,}5x + 1}{0{,}76} \cdot 18 + \frac{x^2 - 2{,}1x + 0{,}2}{-0{,}6} \cdot 15 + \frac{x^2 - 0{,}6x + 0{,}05}{2{,}85} \cdot 6$$

$f(1) = \underline{11{,}6 \text{ kg}}$

7-) $f(x) = x^3 - \cos(x)$ $[0,1]$ $h = 0{,}25$

$f(0{,}1) = ?$

x	0	0,25	0,50	1,00
$f(x)$	-1	-0,984	-0,875	1,523

$$|Et(x)| = \frac{|(x-0)(x-0{,}25)(x-0{,}5)(x-0{,}75)(x-1)|}{5!} |sen\,1|$$

$f(x) = x^3 - \cos(x)$

$f'(x) = 3x^2 + sen(x)$ $\qquad |Et(0{,}1)| \cong 0{,}0000246 < 0{,}00003$

$f''(x) = 6x + \cos(x)$

$f'''(x) = 6 - sen(x)$

$f^{IV}(x) = -\cos(x)$

$f^{V}(x) = sen(x)$

B-)

x	2	5	8
$f(x)$	1	2	6

$f(x) = 3$

$$p(x) = \frac{(x-5)(x-8)}{(2-5)(2-8)} + \frac{(x-2)(x-8)}{(5-2)(5-8)} \cdot 2 + \frac{(x-2)(x-5)}{(8-2)(8-5)} \cdot 6$$

$$= \frac{x^2-13x+40}{18} + \frac{x^2-10x+16}{-9} \cdot 2 + \frac{x^2-7x+10}{18} \cdot 6$$

$$= \frac{x^2}{6} - \frac{5}{6}x - 1 = 0$$

$$x_1 = 6 \quad \cancel{x_2 = -1}$$

Integração Numérica

- Fórmula do trapézio

$$\int f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(h_{-1})) + f_n \right] + \text{ERRO}$$

Erro:

$$Err \leq \left| -\frac{h^3}{12} f''(c) \right| . k$$

1) $\int_1^2 \frac{1}{1+x^4} dx$ $n=5$ $h = \left| \frac{2-1}{5} \right| = 0,2$

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$f(x)$	0,5000	0,3254	0,2065	0,1324	0,0870	0,0588

$$\int f(x)dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right] + f(x_5) \right]$$

$$= \frac{0,2}{2} \left(0,5 + 2 \left(0,3254 + 0,2065 + 0,1324 + 0,0870 \right) + 0,0588 \right)$$

$$= \underline{0,20614}$$

$$|Et(x)| = k \frac{h^3}{12} \cdot f''(x)$$

$$= \frac{5 \cdot 0,2^3}{12} \cdot 1,5 = 0,005$$

$$f = (1+x^4)^{-1}$$

$$f'(x) = -(1+x^4)^{-2} . 4x^3$$

$$f'' = -4 \cdot \frac{x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$= -4 . \left(\frac{3x^2(1+x^4)^2 - x^3 . 2(1+x^4) . 4x^3}{((1+x^4)^4)^2} \right.$$

$$= \frac{4x^2(5x^4-3)}{(1+x^4)^2}$$

Simpson

$$\int f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})] + 2\,(f(x_2) + f(x_4) + \dots] + f(x_n)\right] + Erro$$

Erro

$$|Err| < \frac{h^5}{90} \max |f^{IV}(c)| \quad com \ x_0 < c < x_2$$

3) $$\int_1^{2,5} [x\ln(x)+2]\,dx \qquad h = \frac{2,5-1}{6} = 0,25$$

	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1,25	1,50	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$	2,000	2,2789	2,6082	2,9793	3,3863	3,8246	4,2907

$$\int x\,dx = \frac{0,25}{3}\left[2 + 4(2,2789 + 2,9793 + 3,8246) + 2(2,6082 + 3,3863) + 4,2907\right]$$

$$= \underline{4,5509}$$

$$|Err| = \frac{h^5}{90} f^{IV} \cdot 3 \qquad = 3 \cdot \frac{0,25^5}{90} \cdot \frac{2}{1^3} < \underline{0,0000651 < 0,00007}$$

$$f(x) = x\ln(x) + 2$$

$$f'(x) = \ln(x) + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$f''(x) = x^{-1}$$

$$f'''(x) = -x^{-2}$$

$$f^{IV}(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\,dx$ $\quad E_{gt} \leq 0,00001$ $\quad f = sen(x)$

$f' = cos(x)$

$n = 2m$ $\quad |E_{tr}| \leq m.\dfrac{h^5}{90}$ max $f^{IV}x$ $\quad f'' = -sen(x)$

$f''' = -cos(x)$

$h = \dfrac{x - x_0}{n} = \dfrac{\pi}{2} : 2m = \dfrac{\pi}{4m}$ $\quad f^{IV} = sen(x)$

$|E_{tr}| \leq \dfrac{m . \left(\dfrac{\pi}{4m}\right)^5}{90} . sen(1) = \dfrac{\cancel{m}. \pi^5}{4^5 m^5} : 90$

$= \dfrac{\pi^5}{4^5 . m^4} : 90 \leq 0,00001 \Rightarrow \dfrac{\pi^5}{92160\, m^4} \leq 0,00001$

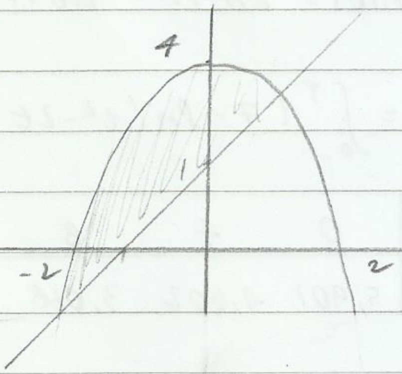
$m \geq 4,2687 \quad m = 5 \qquad n = 2m \therefore n = 10$

6) $y = 4 - x^2 \quad y = 2x + 1$

$-x^2 + 4 = 0 \qquad 2x + 1 = 0$

$x = \pm 2 \qquad x = 0 \quad y = 1$

$y = 0 \quad x = \dfrac{-1}{2}$



$4 - x^2 = 2x + 1$

$f(x).\ x^2 + 2x - 3 \qquad \Delta = 4 + 12 \qquad x_1 = -3 \quad x_2 = 1 \qquad h = \left|\dfrac{-3-1}{4}\right| = 1$

	0	1	2	2	4
x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	-3	-4	-3	0

$\int f(x)dx = \dfrac{1}{3}\left(0 + 4(-3 -3) + 2(-4) + 0\right) = \dfrac{32}{3}$ + erro

/ /

7) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \quad E_{Tr} \leq 0,00001 \qquad f = x^{-1}$

$f' = -x^{-2}$

$|E_{Tr}| < m.\frac{h^5}{90}.\max|f^{IV}(x)| \qquad f'' = 2x^{-3}$

$f''' = -6x^{-4}$

$h = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m} \qquad f^{IV} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$

$|E_{Tr}| < \frac{\cancel{m}.\frac{1}{2^5 m^{\cancel{5}4}}}{90}.\frac{24}{x^5} < 0,00001$

$\frac{24}{2^5.90m^4} < 0,00001 \therefore m^5 > \frac{24}{2^5.90.0,00001}$

$\therefore m > 5,37 \Rightarrow \underline{m = 6}$

pontos $= 2m+1 = 2.6+1 = \underline{13}$

8) $C = \int_0^T (7 - \ln(t^2 - 2t + 3))\,dt \quad ; \text{ se } t = 16$

$h = \frac{16-0}{4} = 4$

0 1 2 3 4

x	0	4	8	12	16
$f(x)$	5,901	4,602	3,068	2,188	1,575

$\int f(x)dx = \frac{4}{3}(5,901 + 4.4,602 + 3,068) + \frac{4}{3}(3,068 + 4.2,188 + 1,575)$

$= \frac{4}{3}(5,901 + 4(4,602 + 2,188) + 2.3,068 + 1,575)$

$= \underline{54,363 + \text{erro}}$

9.) $y=0$ $y=\ln(x-1)$ $x=3$ $x=4,6$ $h=\dfrac{4,6-3}{4}=0,4$

x	3	3,4	3,8	4,2	4,6
y	0,693	0,875	1,030	1,163	1,281

$$\int f(x)\,dx=\frac{0,4}{3}\left[0,693+4(0,875+1,163)+2\cdot 1,030+1,281\right]$$

$$=\underline{1,6248+\text{erro}}$$

$y=\ln(x-1)$

$y'=(x-1)^{-1}$

$y''=-(x-1)^{-2}$

$y'''=2(x-1)^{-3}$

$y^{iv}=-6(x-1)^{-4}$

$$|Etr|<\frac{2\cdot 0,4^5}{90}\cdot\frac{6}{(3-1)^4}$$

$$<0,0000853<0,00009$$

10-) $\displaystyle\int_{0,12}^{0,32} f(x)\,dx$ $h=\dfrac{0,24-0,12}{2}=0,06$

x	0,12	0,18	0,24	~~0,32~~
$f(x)$	1,803	1,281	0,735	~~0,394~~

$$\int_{0,12}^{0,32} f(x)\,dx=\frac{0,06}{2}\cdot(1,803+2\cdot 1,281+0,735)$$

$=$

0,2

11) $\int_{2,0}^{2,8} f(x)\,dx$ 2 decimais

	0	1	2	3
x	2,0	2,4	2,6	2,8
$f(x)$	0,69	0,86	0,96	1,03

$$D^{(k)} f(x) = f(x) + \frac{1}{k}$$

$$\int_{4,0}^{4,8} f(x)\,dx = \frac{0,4}{3} \cdot \left[0,69 + 4 . 0,86 + 0,96 \right] = 0,679 + E_{tr}^{3}$$

$$|E_{tr}(x)| = \frac{0,4^5}{90} \cdot \left(0,69 + \frac{1}{2} \right)$$

12) $\int_1^2 e^x$ $E_r \leqslant 0,0000\,1$ $h = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2m}$

$$|E_{tr}| \leqslant m \frac{h^5}{90} (e^x)_{max}$$

$$< \frac{m . \frac{1}{2^5 . m^{5\,4}}}{90} (e^x)_{max} < \frac{1}{2^5 . 90\, m^4} . e^2 < 0,00001$$

$\therefore m = 4,002$ $m = 5$ $n = 2.m = 2.5 = 10$

pontos = 10+1 = $\underline{11}$

13-) $y = \cos x$ $[0, \pi]$ $h = \frac{\pi}{4}$ 3 decimais

	0	1	2	3	4
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \left| \frac{\pi}{12} \cdot \left[1 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \right] \right| + \left| \frac{\pi}{12} \cdot \left[0 + 4 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) \right] \right. = \underline{2{,}004}$$

$$|E_{Tr}| < \frac{2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{90} \cdot 1 \leq 0{,}00664 < 0{,}007$$

$y = \cos x$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y''' = \sin x$

$y^{IV} = \cos x$

14-) $5 \leq m \leq 10$ $P = \frac{60 \cdot m}{\int_0^{30} c(t)\,dt}$

Para $m = 5$, temos

	0	1	2	3	4	
t	0	6	12	18	24	30
c	0,0	4,0	3,2	1,3	0,2	0,0

$$\int_0^{24} c(t)\,dt = \frac{6}{3} \left(4(4 + 1{,}3) + 2 \cdot 3{,}2 + 0{,}2 \right) = 55{,}6 + erro_1$$

$$\int_{24}^{30} c(t)\,dt = \frac{6}{2} \left(0{,}2 \right) + erro_2 = 0{,}6 + erro_2$$

$$\int_0^{30} = 56{,}2 + erro_1 + erro_2$$

$$P = \frac{60 \cdot 5}{56{,}2} = 5{,}338$$

16) $\int_0^1 e^x \, dx$ $I = [0,1]$ $E_{Tr} < 0,0001$

$$|R| = n \left| \frac{h^3}{12} \cdot e^x|_{max} \right|$$

$$= n \left| \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot e}{12} \right| < 0,0001$$

$$= \frac{\cancel{n} \cdot \frac{1}{n^{\cancel{3}2}} \cdot e}{12} < 0,0001$$

$$= \frac{e}{12n^2} < 0,0001 \quad \therefore \quad n > 47,59 \quad \underline{n = 48}$$

Base:

1) $\int_1^{2,4} \frac{x}{x^2+1} \, dx$ $h = \frac{2,4-1}{7} = 0,2$

$[1,0 ; 2,4]$ $n = 7$

	0	1	2	3	4	5	6	7
x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
Y	1	0,492	0,473	0,449	0,424	0,4	0,377	0,355

$$\int_1^{2,2} f(x)dx = \frac{0,2}{3} \cdot \left[1 + 4(0,492 + 0,449 + 0,4) + 2(0,473 + 0,424) + 0,377 \right)$$

$= 0,569 + \text{erro } 1$

$$\int_{2,2}^{2,4} f(x)dx = \frac{0,2}{2}(0,377 + 0,355) = 0,0732 + \text{erro } 2$$

$$\int_1^{2,4} f(x)dx = 0,6692 + \text{ERRO}$$

2-) $\int_0^T 8 - \ln(t^2-2t+4)\,dt$ $\qquad h = \frac{16-0}{4} = 4$

	0	1	2	3	4
x	0	4	8	12	16
y	6,614	5,515	4,049	3,180	2,571

$$\int f(x)\,dx = \frac{4}{3}\left(6{,}614 + 4(5{,}515+3{,}180) + 2(4{,}049) + 2{,}571\right)$$

$$= 69{,}417$$

3-) $y(x) = x^3 + \ln(x+1) - 1$ $\quad x=1 \quad x=2 \quad y=0$ $\qquad h = \frac{2{,}2-1}{6} = 0{,}2$

	0	1	2	3	4	5	6
x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2
y	0,693	1,516	2,619	4,052	5,862	8,099	10,811

$$\int x^3 + \ln(x+1) - 1\,dx = \frac{0{,}2}{3}\left(0{,}693 + 4(1{,}516 + 4{,}052 + 8{,}099) + 2(2{,}619 + 5{,}862) + 10{,}811\right)$$

$$= 5{,}542$$

4) $\int_{0,1}^{0,8} \operatorname{sen}(x)$

0,3 $\quad$ 0,2 $\quad$ 0,2

x	0,1	0,4	0,6	0,8
$\operatorname{sen}(x)$	0,0998	0,3894	0,5646	0,7174

$$\int_{0,1}^{0,4} \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{0{,}3}{2}(0{,}0998 + 0{,}3894) = 0{,}07338 + \text{erro}_1$$

$$\int_{0,4}^{0,8} \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{0{,}2}{3}(0{,}3894 + 4.0{,}5646 + 0{,}7174) = 0{,}224 + \text{erro}_2$$

$$\int_{0,1}^{0,8} \operatorname{sen}(x)\,dx = 0{,}29738 + \text{ERRO}$$

5) $\int_{3}^{4,6} \ln(x-1)\,dx$ $\qquad h = \frac{4,6-3}{4} = 0,4$

x	3	3,4	3,8	4,2	4,6
$f(x)$	0,693	0,875	1,030	1,163	1,281

$$\int_{3}^{4,6} \ln(x-1)\,dx = \frac{0,4}{3} \cdot \left[0,693 + 4\,(0,875 + 1,163) + 2.1,03 + 1,281 \right)$$

$$= 1,6248 \doteq 1,625$$

$f(x) = \ln(x-1)$

$f'(x) = (x-1)^{-1}$

$f''(x) = -(x-1)^{-2}$

$f'''(x) = 2(x-1)^{-3}$

$f^{IV}(x) = -6\,(x-1)^{-4}$

$$|E_{Tr}| \leq 2.\frac{0,4^5}{90} \cdot \frac{6}{(3-1)^4}$$

$$\leq 0,00008533 < 0,00009$$

6) $y = \ln(x)$ $\qquad x = 2 \quad x = 2,8 \qquad h = 0,2$

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
y	0,693	0,788	0,875	0,956	1,030

$$\int_{2}^{2,8} \ln(x)\,dx = \frac{0,2}{3} \cdot \left[0,693 + 4\,(0,788 + 0,956) + 2.0,875 + 1,030 \right]$$

$$= 0,6966 = 0,697$$

$y = \ln(x)$

$y' = x^{-1}$

$y'' = -x^{-2}$

$y''' = 2x^{-3}$

$y^{IV} = -6x^{-4}$

$$|E_{Tr}| \leq 2.\frac{0,2^5}{90} \cdot \frac{6}{2^4}$$

$$\leq 0,00000177 < 0,00000266$$

7) $\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx$ $\quad E_{Tr} < 0{,}0016666$

$f(x) = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$|E_{Tr}| \leq n\,\frac{h^3}{12} \cdot \frac{2}{x^3}$

$< \frac{\cancel{n} \cdot \frac{2^3}{n^{\cancel{3}}} \cdot 2}{12 \cdot 2^3}$ $\qquad h = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$

$\frac{\cancel{2}^3 \cdot 2}{12 \cdot \cancel{2}^3 \cdot n^2} < 0{,}001666$ $\qquad \therefore n^2 > 100 \quad n > 10 \quad$ ou $n = 11$

8) $y(x) = x^3 - \ln(x+1) - 1$ $\qquad x = 2 \quad x = 5 \quad h = 1 \quad 0{,}1 = \frac{3}{n}$

$y'(x) = 3x^2 - x^{-1}$

$y''(x) = 6x + x^{-2}$ $\qquad |E_{Tr}| \leq \frac{1^5}{90} \cdot \frac{6}{2^4} \cdot < 0{,}0004167$

$y'''(x) = 6 - 2x^{-3}$

$y^{IV}(x) = 6x^{-4}$

$|E_{Tr}| < \frac{1.30 \cdot \frac{6x^3+1}{x^2}}{12}$

9) $f(x) = x + \ln(x)$ $[2,3]$ $|E_{tr}| \leq 0{,}005$

$h = \frac{3-2}{n} = \frac{1}{n}$

$f'(x) = 1 + x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2}$

$'''$

$$|E_{tr}| \leq \frac{x \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{x^2}}{12} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \leq 0{,}005$$

$$n^2 \geq \frac{1}{0{,}24} \therefore n \geq 2$$

Equações Diferenciais

Método de Euler

$f(x+h) = y(x) + hf(x, y(x))$

1) $y' = xy$ $h = 0{,}25$ $x \in [0, 1]$
$y(0) = 1$

$f(x+h) = y(x) + hf(x, y(x))$

x	y
0	1
0,25	1
0,50	1,0625
0,75	1,1953
1,00	1,4194

$y' = F(x, y)$
$y(x_0) = y_0$

$k_1 = F(x, y)$
$k_2 = F(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1)$
$y(x+h) = y(x) + hk_2$

$k_1 = F(x, y) = xy$
$k_2 = (x + 0{,}125)(y + 0{,}125\, k_1)$
$y(x+h) = y(x) + 0{,}25\, k_2$

x	y	k_1	k_2
0,00	1	0	0,125
0,25	1,03125	0,2578	0,3988
0,50	1,13095	0,5655	0,75102
0,75	1,3167	0,989	1,26204
1,00	1,6342		

$y' = \frac{dy}{dt}$

* $\frac{dz}{dt} = 0{,}045(50-z)$ $t=5$ $t=10$

$z(5)$ $z(10)$

$\frac{dz}{dt} = 0{,}045(50-z)$ Admitindo $h=5$

$z(0):0$

$k_1 = F(t,z) = 0{,}045(50-z)$

$k_2 = F(t+2{,}5;\, z+2{,}5k_1) = 0{,}045(50-z-2{,}5k_1)$

$y(x+h) = z(t) + 5k_2$

t	z	k_1	k_2
0	0	2,25	2,00
5	10	1,8	1,6
10	18		

Resolva o P.V.I Utilizando o Euler modificado com $h=0{,}1$
Determine um valor aproximado da solução em $t=0{,}2$

$y' = 1-t+4y$

$y(0)=1$

$k_1 = F(t,y) = 1-t+4y$

$k_2 = F(t+0{,}05,\, y+0{,}05k_1) = (1-t-0{,}05+4y)+0{,}2k_1 = 0{,}2k_1 + k_1 - 0{,}05$

$y(t+0{,}1) = y(t) + 0{,}1 . k_2$ $= 1{,}2k_1 - 0{,}05$

t	y	k_1	k_2
0	1	5	5,95
0,1	1,595	7,28	8,686
0,2	2,4636		

Dada a EDO $y' = 2xy$ com $y(2) = 3,5$, determinar $y(4) = ?$

$\frac{dy}{dx} = 2xy$

$y(2) = 3,5$

$k_1 = F(x, y) = 2xy$

$k_2 = F(x+1, y+k_1) = 2(x+1)(y+k_1)$

$= 2xy + 2xk_1 + 2y + 2k_1$

$= k_1(2x+3) + 2y$

$$y(x+2) = y(x) + 2k_2$$

x	y	k_1	k_2
2	3,5	14	105
4	213,5		

treino

$y' = \frac{dy}{dx}$ $k_1 = F(x,y)$

se $y' = xy$ e $h = 2$, temos

$k_1 = F(x,y) = xy$

$k_2 = F(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1) = (x+1)(y+k_1)$

$y(x+h) = y(x) + 2k_2$

5) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $h = 0,2$

$y' = \frac{x}{y}$

$y(0) = 1$

$k_1 = F(x,y) = \frac{x}{y}$

$k_2 = F(x+0,1, y+0,1k_1) = \frac{x+0,1}{y+0,1k_1}$

$y(x+h) = y(x) + 0,2k_2$

/ /

6)

$y' = x \cdot y^2$ $\quad h = 0{,}2$

$y(0) = 1$

$k_1 = F(x,y) = xy^2$

$k_2 = F(x+0{,}1\,,\ y+0{,}1k_1) = (x+0{,}1)(y+0{,}1k_1)^2$

$y(x+0{,}2) = y + 0{,}2k_2$

Método Runge-Kutta

$k_1 = f(x,y)$

$k_2 = f(x + h/2\,,\ y + \frac{h}{2}k_1)$

$k_3 = f(x + \frac{h}{2}\,,\ y + \frac{h}{2}k_2)$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$

$k_4 = f(x+h,\ y + h\,k_3)$

$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $\quad y(0) = b$

9-)

$\frac{dT}{dt} = 0{,}18\,T.t$ $\quad k_1 = F(t,T) = 0{,}18\,T.t$

$k_2 = F(t+1,\ T+k_1) = 0{,}18\,(T+k_1)(t+1)$

$T(0) = 80$ $\quad k_3 = 0{,}18(t+1)(T+k_2)$

$k_4 = 0{,}18\,(t+1)(T+2k_3)$

$T(t+2) = T(t) + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

10-) $y' = xy$ $\quad h = 0,1$

$y(0) = 1$

$k_1 = xy$

$k_2 = (x+0,05)(y+0,05\,k_1)$

$k_3 = (x+0,05)(y+0,05\,k_2)$

$k_4 = (x+0,05)(y+0,1\,k_3)$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{0,1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

(11)

$$\frac{dy}{dt} = -0,166(y-v) = -0,166(y-24)$$

$y(24) = 85$ $\quad h = 5$

$k_1 = F(y,t) = -0,166(y-24)$

$k_2 = (-0,166(y+2,5k_1-24)$

$k_3 = (-0,166(y+2,5k_2-24))$

$k_4 = (-0,166(y+5k_3-24))$

$$y(x+5) = y(x) + \frac{5}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

Prova P2 2010 - 1° semestre A

Questão 1

P	2	3	6
D	1	2	5

$$P(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}.1 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}.2 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}.5$$

$$= \frac{x^2-9x+18}{4} + \frac{x^2-8x+12}{-3}.2 + \frac{x^2-5x+6}{12}.5$$

$$= \frac{3x^2-27x+54\cancel{-8x^2}+64x-96\cancel{+5x^2}-25x+30}{12}$$

$$= \frac{12x-12}{12} = x-1$$

$$D(P) \cong P(5) = 5-1 = 4\,Kg$$

Questão 2

$$|Etr| \leq \frac{|(x-1)(x-2)(x-3)|}{3!} . \frac{3}{(1+3)^2}$$

$$|Etr(1,6)| \leq \frac{|(1,6-1)(1,6-2)(1,6-3)|}{6} \frac{3}{16}$$

$$\leq 0,0105 < 0,02$$

Questão 3

$\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx \qquad |E_{Tr}| < 0{,}01 \qquad h = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$

$f = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$$|E_{Tr}| \leq n . \left| \frac{\frac{27}{n^3}}{12} . \frac{2}{2^3} \right|$$

$$\leq n . \left| \frac{27}{n^3 . 12} . \frac{1}{4} \right)$$

$$\leq \frac{27}{48n^2} < 0{,}01$$

$$n^2 > \frac{27}{48 . 0{,}01} \qquad n > 7{,}5 \quad \therefore \underline{n = 8}$$

2700 | 0,48
300 56,25
120
240
0

$\begin{array}{r} 48 \\ \times 5 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ \times 6 \\ \hline 288 \end{array}$

Questão 4:

$y(0{,}2) = ?$

$y' = \frac{dy}{dx} = x + y$

$y(0) = 2$

$k_1 = f(x,y) = x + y$

$k_2 = (x + 0{,}1) + (y + 0{,}1 k_1)$

$k_3 = (x + 0{,}1) + (y + 0{,}1 k_2)$

$k_4 = (x + 0{,}2) + (y + 0{,}2 k_3)$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{0{,}1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

x	y	k_1	k_2	k_2	K_4
0	2	2	2,3	2,3	2,7
0,2	2,5				

2
27
$\frac{3}{81}$

32 $\frac{30}{2660}$

5 $\frac{36}{324}$

$324 \,\underline{|4}$
81

Prova P2 A 1º semestre de 2010

Questão 1

$|E|_S \leq 0{,}005 \qquad I = \int_1^2 \sqrt[3]{x}\, dx$

$f(x) = x^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$h = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2K}$

$f''(x) = \frac{-2}{9} x^{-5/3}$

$|E_S| = K \left| \frac{h^5}{90} \right| \max f^{IV}(x) \Big|_{x_0 \leq x \leq x_n}$

$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}$

$f^{IV}(x) = \frac{-80}{81} x^{-12/3}$

$|E_S| = K . \left| \frac{4\left(\frac{1}{32 . K^5}\right)}{9\cancel{0}} \right| . \frac{8\cancel{0}}{\cancel{81}\, 9}$

$= \cancel{K} . \left(\frac{1}{36\, K^{\cancel{5}4}} . \frac{8}{9} \right) = \frac{8}{324 K^4} = \frac{2}{81 K^4} \leq 0{,}005$

$\begin{array}{r} 81 \\ 0{,}005 \\ \hline 0{,}405 \end{array}$

$K^4 \geq \frac{2}{81 . 0{,}005} \geq 4{,}93$

$2000 \,\underline{|0{,}405}$
$3800 \quad 4{,}93$
1550
335

$K \geq 1{,}49 \quad > 2$

pontos: $2 . 2 + 1 = \underline{5}$

x	1	$1{,}25$	$1{,}50$	$1{,}75$	$2{,}00$
$f(x)$	1	$1{,}0772$	$1{,}1447$	$1{,}2051$	$1{,}2599$

$I = \frac{0{,}25}{3} \left(1 + 4 . (1{,}0772 + 1{,}2051) + 2 . 1{,}1447 + 1{,}2599 \right)$

$= \underline{1{,}1399}$

/ /

Questão 2: $T(t) = \ln(t+1) + 5t - 21$

t	3	3,5	4
T	-4,614	-1,996	0,609

$$P(t) = \frac{(x-3{,}5)(x-4)}{(3-3{,}5)(3-4)} \cdot (-4{,}614) + \frac{(x-3)(x-4)}{(3{,}5-3)(3{,}5-4)} \cdot (-1{,}996) + \frac{(x-3)(x-3{,}5)}{(4-3)(4-3{,}5)} \cdot 0{,}609$$

$$P(t) = \frac{x^2 - 7{,}5x + 14}{0{,}5} \cdot (-4{,}614) + \frac{x^2 - 7x + 12}{-0{,}25} : 1{,}996 + \frac{x^2 - 6{,}5x + 10{,}5}{0{,}5} \cdot 0{,}609$$

$$= x^2\left(-\frac{4{,}614}{0{,}5} + \frac{1{,}996}{0{,}25} + \frac{0{,}609}{0{,}5}\right) + x\left(\frac{34{,}605}{0{,}5} - \frac{13{,}972}{0{,}25} - \frac{3{,}9585}{0{,}5}\right) +$$

$$- \frac{64{,}596}{0{,}5} + \frac{23{,}952}{0{,}25} + \frac{6{,}3945}{0{,}5}$$

$$= -0{,}026x^2 + 5{,}405x - 20{,}595 = 0$$

$\therefore\ x_1 = 3{,}883 \quad x_2 = 204{,}00$

Questão 3:

$y' - y = \sqrt{x} \qquad y(0{,}1) = 1 \quad h = 0{,}1 \quad 0{,}1 \leq x \leq 0{,}4$

a) $k_1 = \sqrt{x} + y$

$k_2 = \sqrt{(x + 0{,}05)} + y + 0{,}05\,k_1$

$y(x+h) = y(x) + 0{,}1\,k_2$

x	y	k_1	k_2
0,1	1	1,316	1,453
0,2	1,145	1,596	1,727
0,3	1,317	1,865	2,002
0,4	2,088		

Polinômio Interpolador de Lagrange

$$- p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} . f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} . f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Termo Complementar de Lagrange (Erro de truncamento)

$$|Er(x)| \le \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|}{(n+1)} \max_{x_0 \le c \le x_n} \left| f^{n+1}(x) \right|$$

Polinômio Interpolador de Newton

$$p(t) = f(x_0) + \Delta f(0) t + \frac{\Delta^2 f(0) t(t-1)}{2!} + \frac{\Delta^3 f(0) t(t-1)(t-2)}{3} \dots \frac{\Delta^n f(0)}{n} T$$

Mudança de variável: $x = at + b$

Termo Complementar de Lagrange (Erro de truncamento)

$$|Etr(x)| \le \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \le c \le x_n} \left| \frac{\Delta^{n+1} f(c)}{h^{n+1}} \right|$$

Fórmula trapezoidal

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + erro$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)] + \sum_{i=1}^{n} erro_i$$

Termo complentar da fórmula trapezoidal

$$|Etr(x)| \le \left| n \frac{-h^3}{12} . \underset{(max)}{f''(x)} \right|$$

Fórmula de simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{x_1 - x_0}{3} \cdot \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right] + \text{erro}$$

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot \left[f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3 + \dots f(x_{2n-1}) \right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}) \right) \right]^{f(x_n)}_{+\text{erro}}$$

Termo complementar de simpson (Erro de truncamento)

$$|Err| \leq n \left| \frac{h^5}{90} \right| \cdot \underset{(max)}{f^{iv}(c)}$$

Método de Euler

$$f(x+h) = y(x) + hf(x, y(x))$$

Método de Euler modificado

$$\left| \begin{array}{l} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} k_1 = F(x,y) \\ k_2 = F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right) \end{array}$$

$$y(x+h) = y(x) + hk_2$$

Exemplo $y = F(x) = 2x + 2$

$y' = \frac{dy}{dx}$ $F(x,y)$

Método de Runge Kutta

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$k_1 = F(x,y)$$

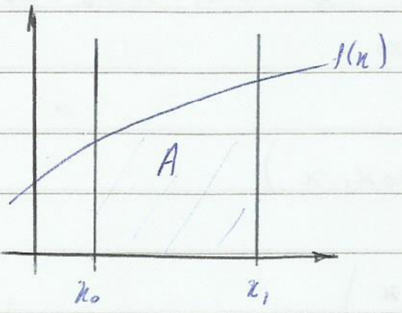
$$k_2 = F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = F\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = F(x+h, y + h k_3)$$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Integração numérica

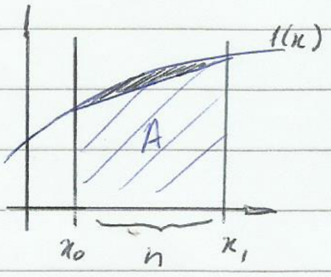


$$A=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

$$f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\downarrow} + R_{n+1}(x)$$

polinômio de lagrange

Fórmula trapezoidal



x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx + \boxed{\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} R_2(x)\,dx}_{\bar{R}}}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1)\right]dx + \bar{R}_2$$

$$= \frac{f(x_0)}{-h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)\,dx + \frac{f(x_1)}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)\,dx + \bar{R}_2$$

$$= \frac{f(x_0)}{\cancel{-h}}\,\frac{-h^2}{2} + \frac{f(x_1)}{\cancel{h}}\cdot\frac{h^2}{2} + \bar{R}_2$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \bar{R}_2$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(c)dx \sim \frac{f''(c)}{2!} \int_{x_0}^{x_1} x^2 - x.x_1 - x.x_0 + x_0x_1 \, dx$$

$$\sim \frac{f''(c)}{2!} . \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{x_1 x^2}{2} - \frac{x^2 . x_0}{2} + x_0 x_1 . x \right)$$

$$= \frac{f''(c)}{2!} \left(\frac{2x^3 - 3x_1 x^2 - 3x^2 . x_0 + 6 x_0 x_1 x}{6} \right)$$

$$= \frac{f''(c)}{12} \left(2x^3 - 3x_1 x^2 - 3x^2 x_0 + 6 x_0 x_1 x \right) \Big|_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{f''(c)}{12} \left[2x_1^3 - 3x_1^3 - 3x_1^2 x_0 + 6x_0 x_1^2 - 2x_0^3 - 3x_1 x_0^2 + 3x_0^3 + 6x_0^2 x_1 \right]$$

$$= \frac{f''(c)}{12} \left(-x_1^3 - 3x_1^2 x_0 + 3x_0^2 x_1 + 3x_0^3 \right)$$

$$= \frac{f''(c)}{12} \frac{-(x_1 - x_0)^2}{6} = \frac{f''(c)}{12} - h^3$$

$$\bar{R}_2 = \frac{-h^2}{12} f''(c)$$

$x_0 < c < x_1$

Termo do completamento

$$\bar{R}_2 = \int_{x_0}^{x} R_2(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(c) dx$$

$$\bar{R}_2 = -\frac{h^3}{12} f''(c)$$

$x_0 < c < x_1$

Exercício

x	$f(x)$
0,1	1,36
0,2	1,44

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \bar{R}.$$

$$\int_{0,1}^{0,2} f(x)\,dx = \frac{0,1}{2}\left[1,36 + 1,44\right] + \bar{R}.$$

$= 0,139 \simeq 0,14 +$ erro

Ex II

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \bar{R}_{21} +$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \bar{R}_{22} +$$

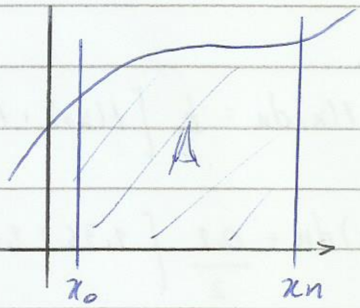
$$= \frac{h}{2}\left[f(x_3) + f(x_4)\right] + \bar{R}_{23} + \cdots$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(n)\right] + \bar{R}_{24}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] + f(x_n)\right\} + \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{2i}$$

Integraçao numérica

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_i	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$



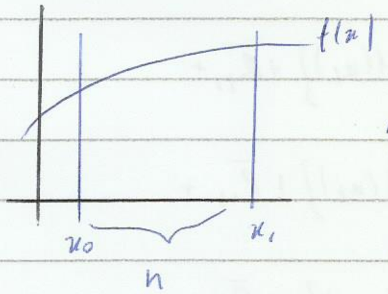
$$A = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\,dx + \underbrace{\int_{x_0}^{x_n} R_{n+1}(x)\,dx}_{\bar{R}_{n+1}}$$

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Fórmula trapezoidal

$n = 1$

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$



$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \bar{R}_2$$

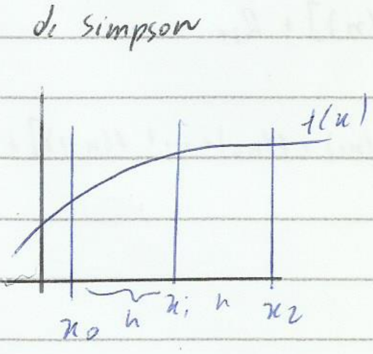
$$\bar{R}_2 = \frac{h^3}{12} f''(c)$$

$$x_0 < c < x_1$$

Fórmula de simpson

$n = 2$

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$



$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \bar{R}_3$$

$$\bar{R}_3 = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(c)$$

$$x_0 < c < x_2$$

Exercício

$\int_{2,0}^{2,2} \ln x \, dx$

Erro

$\bar{R}_3 = -\frac{0,1^5}{90} \cdot -6x^{-4}$

$=$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2}$

$f'''(x) = 2x^{-3}$

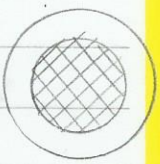
$f^{IV}(x) = -6x^{-4}$

$h = 0,1$

x	$f(x)$
2,0	0,6931
2,1	0,7419
2,2	0,7885

$$\int_{2,0}^{2,2} \ln x \, dx = \frac{0,1}{3}\left[0,693 + 4 \cdot 0,742 + 0,788\right] + \bar{R}_3$$

$$= 0,1483x + \bar{R}_3$$



$ERRO = E_D + E_{TR}$

$Erro = |\bar{R}_0| = \left| -\frac{0,15}{90} \cdot \frac{-6}{c^4} \right| < \frac{0,1^5 \times 6}{90 \cdot 2,0^4} = 4,1667 \cdot 10^{-6} < 5 \cdot 10^{-6}$

Ex: Fórmula Geral

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_4} + \int_{x_4}^{x_6} + \dots + \int_{2n-2}^{2n}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \bar{R}_{3 1} +$$

$$+ \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \bar{R}_{3 2} +$$

$$\frac{h}{3}\left[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right] + \bar{R}_{3 3} +$$

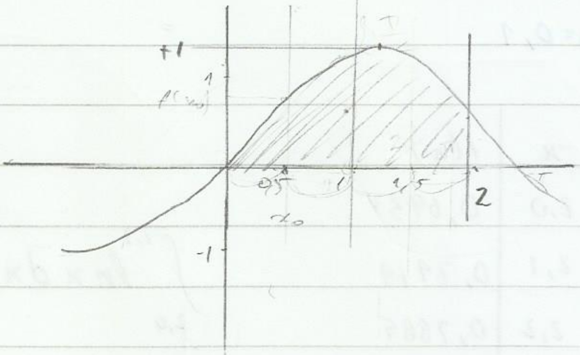
$$\dots\dots$$

$$\frac{h}{3}\left[f(2n-2) + 4f(2n-1) + f(2n)\right] + \bar{R}_{3n}$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(2n-1)\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(2n-2)\right] + f(2n)\right] \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{3i}$$

Ex: Calcular o volume do sólido gerado ao fazer a rotação da região dada por $y=0$, $y=\text{sen}(x)$, $x=0$, $x=2$ em torno do eixo x. Utilizar a fórmula de simpson, dividindo o intervalo em 4 partes iguais. (4 decimais)

$$V=\pi\int_0^2 \text{sen}^2(x)\,dx$$



x	$f(x)$
0	0
0,5	0,2298
1	0,7080
1,5	0,9950
2	0,8268

$$V=\pi\int_0^1 \text{sen}^2(x)\,dx=\frac{0,5}{3}\left[0+4.0,2298+0,7080\right]+\bar{R}_{3}1$$

$$=0,8482+R_3$$

$f(x)=\text{sen}^2(x)$

$$V=\pi\int_1^2 \text{sen}^2(x)\,dx=\frac{0,5}{3}\left[0,7080+4.0,995+0,8268\right]+\bar{R}_{3}2$$

$f'(x)=2\text{sen}(x)\cos(x)$

$f''(x)=2(\cos^2(x)-\text{sen}^2(x))$

$V=2,8875+\bar{R}_{3}2$

$f'''(x)=2(2\cos(x)$

$\bar{R}_3=$

Exercício

$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ Quantos pontos

$E_{TR}\leq 0,00001$

Trapezoidal

Exercicio

Dada a função $f(x) = \sqrt{x} + x^2 - x - 1$ tabelar para $x = 1, 2, 3$ e 4.
~~Quantas~~ 4 decimais escrever o polinômio de lagrange e após, calcular $f(2,3)$
Delimitar o Etr

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	2,4142	6,732	13

$$P(x) \equiv f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 0 + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 2{,}4142 +$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 6{,}7320 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 13$$

$$\text{I} \quad (x^2-4x+3)(x-4) = x^3-4x^2+3x-4x^2+16x-12 = x^3-8x^2+19x-12$$

$$\text{II} \quad (x^2-3x+2)(x-4) = x^3-3x^2+2x-4x^2+12x-8 = x^3-7x^2+14x-8$$

$$\text{III} \quad (x^2-3x+2)(x-3) = x^3-3x^2+2x-3x^2+9x-6 = x^3-6x^2+11x-6$$

$$= (x^3-8x^2+19x-12) \cdot 1{,}2071 - (x^3-7x^2+14x-8)\,3{,}366 +$$

$$(x^3-6x^2+11x-6) \quad 2{,}16666$$

$$p(x) = 0{,}0078x^3 + 0{,}9052x^2 - 0{,}3558x - 0{,}5572$$

$$p(2{,}3) = 3{,}5079$$

$$E_t(2{,}3) \leq \left| \frac{(2{,}3-1)(2{,}3-2)(2{,}3-3)(2{,}3-4)}{4!} \right| \cdot$$

$$\max_{1<c<4} \left| \frac{-15}{16} x^{-7/2} \right| = 0{,}0235$$

$$f = \sqrt{x} + x^2 - x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} + 2$$

$$f'''(x) = \frac{-1}{4} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) x^{-5/2} =$$

$$= \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

$$f''''(x) = \frac{-15}{16} x^{-7/2}$$

EDO - Runge - Kutta

$y' = f(x,y)$ $\quad k_1 = f(x,y)$

$y(x_0) = \alpha$ $\quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_1\right)$

$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} k_2\right)$

$k_4 = f(x+h, y+h\,k_3)$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

Exercício

$y' = x.y$ $\quad k_1 = x.y$

$y(1) = 1$ $\quad k_2 = (x+0{,}1)(y+0{,}1k_1)$

$h = 0{,}2$ $\quad k_3 = (x+0{,}1)(y+0{,}1k_2)$

$[1,2]$ $\quad k_4 = (x+0{,}2)(y+0{,}2k_3)$

$$y(x+0{,}2) = y(x) + \frac{0{,}1}{3}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

x	$y(x)$	k_1	k_2	k_3	k_4
1	1	1	1,21	1,2331	1,4959
1,2	1,2461	1,4953	1,8143	1,8558	2,2642
1,4	1,6161	2,2625	2,7635	2,8387	3,4941
1,6	2,1815	3,4903	4,3019	4,4399	5,5251
1,8	3,0648	5,5166	6,8713	7,1287	8,9811
2	4,4814				

Exata

$x' = yy \quad \left\{ \frac{dy}{dx} = x \cdot y \right\} \quad \left\{ \int \frac{dx}{y} \right\} = x\,dx$

$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$ $\quad 0 = \frac{1}{2} + c \} = c = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{x-1}{2}$

$y = 4{,}462$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$ $\quad \ln|y| = \frac{x^2-1}{2} \} = y = e$