Cálculo 3

Séries

1. Introdução

Seja a sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ A soma de todos os seus termos chama-se série infinita

Indicação: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

Obs.: $\underline{a_n}$ termo geral da série

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ é um exemplo de série numérica

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots$ é um exemplo de série de funções

2. Somas parciais ou reduzidas de ordem $\underline{n}$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n}$

↳ Soma reduzida de ordem n

3. Convergência e divergência de séries

Seja $\sum a_n$ uma série numérica. Ela é <u>convergente</u> para o número S (ou tem soma S) se, e somente se, o limite $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ existe e é finito, sendo S_n a soma parcial de ordem n.

Seja $\sum a_n$ uma série numérica. Ela é <u>divergente</u> se $\lim_{n \to \infty} S_n$ não existe ou é infinito. Neste caso, a série não tem soma.

Revisão

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

4. Exemplos

a) Determine, se existe a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

- * Para existir a soma da série, ela deve ser convergente, portanto

$\lim_{n \to \infty} S_n = S$

Resolução

1.) Achar S_n

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right)$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\right)$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

2.) $\lim_{n \to \infty} S_n$ $\qquad \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n+2}}}\right) = \frac{1}{2}$

Logo, a série é convergente e sua soma vale $\frac{1}{2}$

b) Determine, se existir, a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

1º) Achar S_n

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$S_n = \ ?$

Vamos desmembrar $\frac{1}{n^2+n}$ na soma de frações parciais.

Obs: $n^2 + n = n(n+1)$

Logo $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)} \qquad \begin{cases} A + B = 0 \rightarrow B = -A \rightarrow B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

Logo: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Então:

$S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right)$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right)$

$\vdots$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

2º) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n+1}}}\right) = 1$

Logo, a série é convergente a sua soma e vale 1

c) Determine, se existir, a soma da série $\sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

1º) S_n

$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$$S_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 0, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

2º) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$

Pelo teorema da unicidade, o limite não existe. Logo, a série é divergente e não tem soma.

Exercício (Para casa)

Ache, se existir, a soma da série

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ Obs: fatorar n^2+3n+2 e separar em funções parciais

Obs: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Resp. Convergente e a soma da série $= \frac{1}{2}$

b) $\sum_{2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln n}$ Resp.: Convergente, soma da série $= \frac{1}{\ln 2}$

Dica: $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$ $(A, B > 0)$

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln n} = \sum_{2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln(n+1)\ln n} = \sum_{2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)\ln n} - \frac{\ln n}{\ln(n+1)\ln n}$$

c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ Resp.: Convergente, soma da série $= 1$

... Continuação

5) Fórmula do termo geral

Revisão: PA

Ex: $(3, 5, 7, 9, \dots)$ $r = 2$

$b_n = b_1 + (n-1) \cdot r$

$b_n = 3 + (n-1) \cdot 2$

$b_n = 2n+1$

PG

Ex: $(2, 6, 18, 54, \dots)$ $q = 3$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Ex: Escreva uma fórmula do $\underbrace{\text{termo geral}}_{an}$ de cada série

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$ R: $an = \frac{1}{2n}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

b) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ R: $an = \frac{1}{2n-1}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

Obs: $(1, 3, 5, 7 \ldots)$ PA $r = 2$

$bn = b_1 + (n-1)r$

$bn = 1 + (n-1) \cdot 2$

$bn = 2n - 1$

c) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots$ R: $an = \frac{n}{2^{n-1}}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

Obs: $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ PG $q = 2$

$bn = b_1 \cdot q^{n-1}$

$bn = 2^{n-1}$

d) $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ R: $an = \frac{1}{n^2}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

e) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \ldots$ R: $an = \frac{2n}{3n+2}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$(2, 4, 6, \ldots)$ PA $r = 2$

$bn = b_1 + (n-1)r$

$bn = 2 + (n-1) \cdot 2$

$bn = 2 + 2n - 2$

$bn = 2n$

$(5, 8, 11, \ldots)$ PA $r = 3$

$bn = b_1 + (n-1)r$

$bn = 5 + (n-1) 3$

$bn = 5 + 3n - 3$

$bn = 3n + 2$

1) $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \dots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

R: $a_n = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$

Resumo: Aula Passada

Sequência: $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

Série: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_1^\infty a_n$ (a_n: termo geral)

S_n: soma reduzida de ordem n

→ $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ existe e é finito: convergente (S: soma da série)

→ $\lim_{n \to \infty} S_n$ não existe ou é infinito: divergente (não tem soma)

Continuação...

Proposições principais

1) Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem convergentes, com somas A e B, respectivamente, então

a) $\sum (a_n \pm b_n)$ é convergente e tem soma $A \pm B$

Obs.: Se uma delas for divergente, a soma (ou a diferença) será divergente.

b) $\sum k.a_n$ é convergente e tem soma $k.A$ ($k \in \mathbb{R}$)

Obs.: Se $k \neq 0$ e $\sum a_n$ é divergente, então $\sum k a_n$ diverge

2) Introduzir ou retirar um número finito de termos não altera a convergência da série.

Teorema da Condição Necessária (TCN)

Se a série $\sum a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. A recíproca não é verdadeira, ou seja, existem séries com $\lim_{n\to\infty} = 0$ que são divergentes. Neste caso, podemos afirmar que:

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou não existe a série é divergente
- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não podemos afirmar

Ex: Usando o TCN, estude as seguintes séries

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^2}{3n^2+2n+1}$ a_n

$$S_1 = a_1 = \frac{7}{6}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{7}{6} + \frac{28}{17}$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2}{3n^2+2n+1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} \cdot 7}{\cancel{n^2}\left(3 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}\right)} = \frac{7}{3}$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pelo TCN, a série é divergente

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}}} = 1$$

Logo, a série é divergente.

c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3n}{4n^2+2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}(4+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{0})} = \frac{3}{4.\infty} = 0$$

Como, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, Não podemos afirmar nada.

d) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Obs.: Lembrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pelo TCN a série é divergente

e) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \dots$

1º) Determinar a_n

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

2º) $\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}}} = 1$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$, pelo TCN, a série é divergente

Série geométrica

É a série gerada por uma (PG)

Ex: $(3, 6, 12, \dots)$ P.G. $q = 2$

Série: $3 + 6 + 12 + \dots$

· Lembrar que: $(3, 6, 12, \dots)$ PG $q = 2$

$b_n = b_1 q^{n-1}$

$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Definição

Seja $a \neq 0$ e considere que uma razão constante. A série geométrica é definida por

$$\sum_{1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Ex: $\sum_{1}^{\infty} 3 \cdot 2^{n-1} = 3 + 6 + 12 + \dots \quad q = 2$

Ex: $\sum_{1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} = 2 + 6 + 18 + \dots \quad q = 3$

c) $\sum_{1}^{\infty} 4^n = 4 + 16 + 64 + \dots \quad q = 4$

d) $\sum_{1}^{\infty} (-2)^n = -2 + 4 - 8 + \dots \quad q = -2$

e) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad q = \frac{1}{2}$

Proposições

a) Se $|q| < 1$, então a série geométrica é convergente e sua soma é dada por $S = \dfrac{a}{1-q}$ (a: 1º termo ; q: razão)

Demonstração

A soma dos $\underline{n}$ primeiros termos de uma PG é dada por $S_n = \dfrac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Como $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(q^n \xrightarrow{} 0 - 1)}{q-1} = \frac{-a}{q-1} = \frac{-a}{q-1} = \frac{a}{1-q}$$

$$\boxed{\text{b) Se } |q| \geq 1 \text{, então a série geométrica é divergente, logo não tem soma.}}$$

Ex: Avalie a convergência ou divergência das séries geométricas. Ache a soma quando existir.

a) $\sum_{1}^{\infty} 3 . 2^{n-1} = 3 + 6 + 12 + \ldots$

Como $|q| \geq 1$ ($|2| \geq 1$) a série geométrica é divergente, Logo não tem soma.

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

Como $|q| < 1$, a série geométrica é convergente e sua soma é:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

c) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \ldots$

1º) Verificar se é série geométrica

$\frac{\sqrt{3}}{3} : 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{9} : \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$S = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$

$\therefore S = \frac{3}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{9-3} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ A série é convergente e sua soma é $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

d) $\sum_{1}^{\infty} (-2)^n = -2 + 4 - 8 + \cdots$

- Como, $|b| \geq 1$ a série geométrica é divergente, logo, não tem soma.

HOMEWORK

e) $1 - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{5}}{25} + \cdots$ R: Convergente ; $S = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$

f) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ R: Convergente ; $S = 2$

Do livro (new) exerc. 46 a 54 (p. 18) ✓

exerc. 60 a 72 (p. 24 e 25)

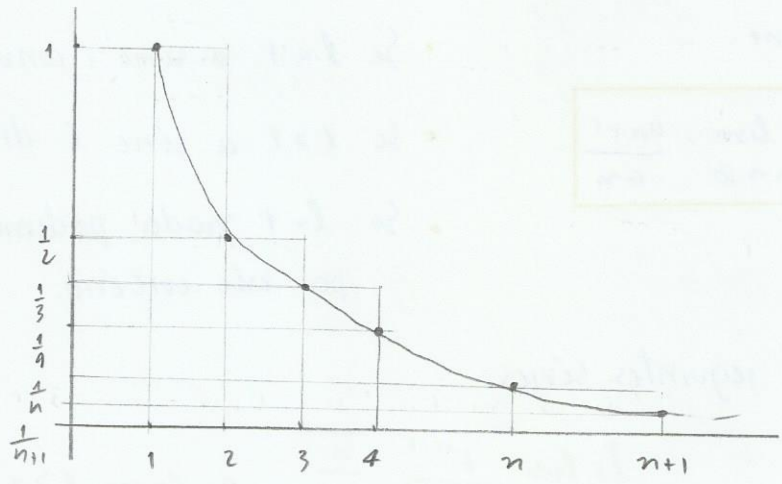
exerc. 73 a 86 (p. 38 e 39)

Série harmônica

A série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ é denominada série harmônica e é divergente.

Demonstração

Seja o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$



Calculando as áreas dos retângulos

$A_1 = 1 . 1 = 1$

$A_2 = 1 . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$A_3 = 1 . \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$A_n = 1 . \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

A soma das áreas coincide com a soma parcial de ordem n (S_n) da série

$1 + \frac{1}{2} + \dots$

Logo: $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Temos que $S_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

$S_n > \ln|x| \Big|_1^{n+1}$

$S_n > \ln|n+1| - \cancel{\ln|1|}^{0}$

$S_n > \ln|n+1|$

Aplicando o limite, temos

$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \ln|n+1| = \infty$ Logo, a série é divergente

Critérios de convergência de séries positivas

* 1º critério) <u>Critério da razão</u> (ou de D'Alembert) Seja a série positiva

$\sum_1^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Considere $\boxed{l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}$

- Se $l < 1$ a série é convergente
- Se $l > 1$ a série é divergente
- Se $l = 1$ nada podemos afirmar por este critério.

Ex: Estude as seguintes séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{n}}_{a_n}$

$l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)}{\frac{2^n}{n}}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}.2}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{2^n}}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

R: Como $l > 1$, pelo critério da razão, a série é divergente

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$

Obs.: $3! = 3.2.1$

$\frac{5!}{3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2)(n+1)$

$\frac{2n!}{(2n+2)!} = \frac{\cancel{2n!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{2n!}} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{7^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{7^n}{n!}\right)}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{7^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{7^n}.7}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{7^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{7}{n+1} = 0 < 1$$

Como $l<1$, pelo critério da razão, a série é convergente

c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

Obs.: lembrar que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right) : \left(\frac{3^n}{n^n}\right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{3^n}.3}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{3^n}}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{3}{(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0.e = 0 < 1$$

Como $l<1$, pelo critério da razão, a série é convergente

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{2^n \cdot n^n}$ (Exercício de prova)

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{2^{(n+1)} \cdot (n+1)^{n+1}} \right) \div \left(\frac{3^n \cdot n!}{2^n \cdot n^n} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{2^{(n+1)} \cdot (n+1)^n \cdot (n+1)} \right) \cdot \frac{2^n \cdot n^n}{3^n \cdot n!}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot (n+1)^n \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot n^n}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{3}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2e} < 1$$

Como, $L < 1$, pelo critério da razão é convergente

e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)!} \right) \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{(n!)^2}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cancel{n!} (n+1) \cancel{n!}}{(2n+2)(2n+1) \cancel{2n!}} \cdot \frac{\cancel{2n!}}{\cancel{n!} \cancel{n!}}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{2n + 2}{8n + 6} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} < 1$$

Como $l < 1$, pelo critério da razão a série é convergente.

2º Critério) <u>Critério de raiz enésima</u> (ou de Cauchy) Seja Σa_n uma série positiva. Considere $l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$

- Se $l < 1$ a série é convergente
- Se $l > 1$ a série é divergente
- Se $l = 1$ nada podemos afirmar por este critério

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n$

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{\cancel{n}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(1 + \overset{0}{\frac{1}{n}})}{\cancel{n}(2 + \overset{0}{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{2} < 1$$

Como $l < 1$, pelo critério de raiz enésima, a série é convergente

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^{\frac{3n+4}{5}}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^{\frac{3n+4}{5}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^{\frac{3n+4}{5n}}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+4}{5n} \right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\cancel{n}(2 + \overset{0}{\frac{1}{n}})}{\cancel{n}(1 + \overset{0}{\frac{1}{n}})} \right]^{\lim_{n \to \infty} \left[\frac{\cancel{n}(3 + \overset{0}{\frac{4}{n}})}{5 \cancel{n}} \right]} = 2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8} > 1$$

Como $l > 1$, pelo critério da raiz enésima a série é divergente

HOMEWORK

p 38 até 41 Ex. 73 até 115

p 42 . Ex 120 a 124

p 24 . Ex 60 a 72

Na aula passada

Critérios para analizar séries

-> razão

-> enésima

Continuação

Critério da integral imprópria

1º) Integral imprópria

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\int_a^t f(x)\,dx\right]$$

- Se o limite existe e é finito, então a integral imprópria é convergente
- Se o limite não existe ou é finito, então a integral imprópria é divergente.

Ex: Calcular $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\int_a^t f(x)\,dx\right]$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\int_1^t \frac{1}{x}\,dx\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\ln|x|\Big|_1^t\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\ln|t| - \ln|1|\right] = \infty$$

Logo, a integral imprópria diverge

2º) Critério da integral imprópria

Seja $f(x)$ uma função definida, contínua, positiva e decrescente para $x \geq 1$, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$. A série $\sum_1^\infty a_n$ converge se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge e diverge se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergir.

Ex: Verifique se a função é decrescente e, em caso positivo, estude as séries aplicando o critério da integral imprópria.

a) $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3}$ (ex 126 p. 42)

Seja $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^3}$, para $x \geq 1$

1.º) f é decrescente?

Se $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^3} \Rightarrow f(x) = (2x+3)^{-3}$

$f'(x) = -3(2x+3)^{-4} \cdot 2 = \frac{-6}{(2x+3)^4} < 0, \forall x \geq 1$

logo $f(x)$ é decrescente para todo $x \geq 1$

2.º) $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \left[\int_a^t f(x)\,dx \right]$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+3)^3} dx = \lim_{t \to \infty} \left[\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+3)^3} dx \right]$

$\int \frac{1}{(2x+3)^3} dx$

$2x+3 = t$

$2\,dx = dt$

$dx = \frac{1}{2} dt$

$\int \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-3} dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-2(2x+3)^2} \right]$

$= \lim_{t \to \infty} \left[\int_1^t \frac{1}{(2x+3)^3} dx \right] = \lim_{t \to \infty} \left[\left(\frac{-1}{4(2x+3)^2} \right) \Big|_1^t \right]$

$= \lim_{t \to \infty} \left[\cancel{\frac{-1}{4(2t+3)^2}}^{\,0} - \left(\frac{-1}{100} \right) \right] = \frac{1}{100}$

Como, a integral imprópria converge, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3}$ também converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (ex 127 p.40)

1º) f é decrescente? $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$

2º) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \left[\int_a^t f(x)\,dx \right]$

$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t \to \infty} \left[\int_1^t \frac{x}{x^2+1}\,dx \right]$

$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ $\quad u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$x\,dx = \frac{1}{2}\,du$

$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t \to \infty} \left[\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) \right)\Big|_1^t \right]$

$= \lim_{t \to \infty} \left[\frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \frac{1}{2}\ln|2| \right] = \infty$

Como a integral imprópria diverge, a série $\sum_1^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ também diverge.

Série harmônica generalizada

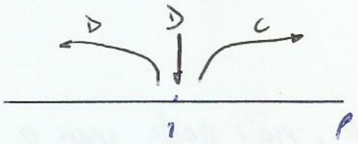
Obs. Na aula passada

$\sum_{1}^{n} \frac{1}{n}$ é a série harmônica e é divergente

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ é denominada série harmônica generalizada (ou série p ou série de Dirichilet).

- Se $p \leq 1$: a série é divergente
- Se $p > 1$: a série é convergente

Resumo



Demonstração:

a) Se $p = 1$, temos a série harmônica $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que é divergente

b) Se $p \neq 1$ Seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$ $f(x)$ é decrescente e

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \to \infty} \left[\int_1^t \frac{1}{x^p} dx \right] = \lim_{t \to \infty} \left[\int_1^t x^{-p} dx \right] = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right) \Big|_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \right) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \infty, & \text{se } p < 1 \\ \frac{-1}{1-p}, & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Exemplos

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ Série p, com $p = 3$ converge

b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ Série p, com $p = \frac{1}{2}$ diverge

c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, Série p, com $p = \frac{3}{2}$, converge

Exercício

Verificar se ~~e~~ é decrescente e, em caso positivo, aplicar o critério da integral imprópria.

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$ R: f decrescente, $f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} < 0$ $(\forall x \geq 2)$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left[\ln|\ln \infty| - \ln|\ln 2| \right] = \infty. \quad \text{(divergente)}$$

HOMEWORK

Ex 125 até 136 (p. 42 e 43)

Dicas

1°) Ex 125 (não é decrescente, não pode usar o critério integral imprópria (usar TCN)

2°) Ex 130) Usar $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$

3°) Ex 133) $\int \frac{x}{x^4 + 1}\, dx = \int \frac{x}{(x^2)^2 + 1}\, dx$ $\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \end{cases}$

Nas aulas passada

TCN

Série geométrica

Série harmônica

Critérios

Razão -> ! ; n^n ; $(n!)^n$ (*)

Raiz enésima -> $(\ )^n$ (*)

Integral Imprópria

Série p

Raabe

Comparação por limites (*)

Comparação por desigualdades (*)

Critério de Raabe

Seja $\sum_{1}^{\infty} a_n$ uma série positiva. Considere $l = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

- Se $l > 1$ a série é convergente
- Se $l < 1$ a série diverge

] Cuidado ($\neq$ do critério da razão)

- Se $l = 1$ nada podemos afirmar por este critério

Esse critério normalmente é usado nos casos em que, pelo critério da razão, $l = 1$ (inconclusivo)

Exemplo: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n}$

Mostre que a análise pelo critério da razão é inconclusiva e determine o caráter da série por Raabe.

1º) Pelo critério da razão

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \quad \begin{cases} l < 1 : C \\ l > 1 : D \\ l = 1 : ? \end{cases}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(\cancel{n+1})(n+2)} : \frac{1}{n(\cancel{n+1})} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1 + \cancel{\frac{2}{n}}\right)} = 1$$

, Com $l = 1$, pelo critério da razão, nada podemos afirmar sobre o caráter da série

2º) Pelo Critério de Raabe $\begin{cases} l > 1 : C \\ l < 1 : D \\ l = 1 : ? \end{cases}$

$$l = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} n\left[\frac{1}{n(n+1)} : \frac{1}{(\cancel{n+1})(n+2)} - 1\right] = \lim_{n \to \infty}\left[\frac{(n+2)}{n} - 1\right]$$

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+2)-n}{\cancel{n}}\right] = 2 > 1$$ Como $l > 1$, pelo Critério de Raabe a série é convergente.

Ex 117 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ Resolver por Raabe

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{2^n} : \frac{n+1}{2^{n+1}} - 1\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n.\cancel{2^n}.2}{\cancel{2^n}(n+1)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n-n-1}{n+1}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{2}}(1-\cancel{1/n}^{\,0})}{\cancel{n}(1+\cancel{1/n}^{\,0})} = \infty > 1$$

Como $l > 1$, pelo Critério de Raabe, a série é convergente.

Critérios de comparação (por limites ou por desigualdades)

I) Critério da comparação por limite

Sejam duas séries positivas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Considere

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ temos que:

a) Se $0 < l < +\infty$: as duas séries tem o mesmo caráter

b) Se $l = 0$ e $\sum_1^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_1^{\infty} a_n$ também converge

c) Se $l = \infty$ e $\sum_1^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_1^{\infty} a_n$ também diverge

Obs: Se $l = 0$ e $\sum b_n$ diverge: nada podemos afirmar

Se $l = \infty$ e $\sum b_n$ converge: nada podemos afirmar

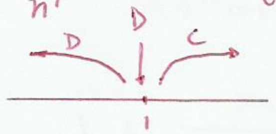
Obs.: $\sum_1^\infty a_n$: série dada no exercício

$\sum_1^\infty b_n$: série que será determinada

Quarta 5:20

Revisão

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ (série p) $\begin{cases} \cancel{\text{série}}\ p \leq 1 : D \\ p > 1 : C \end{cases}$



Ex: $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ C

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1/2}}$ D

$\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ D

Ex: Estude o carater da série utilizando o critério de comparação por limite

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2-1}{5n^3-n+1}$

1º) Criar $\sum_1^\infty b_n$

$\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{n^2}{n^3} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$ ($\underbrace{\text{A série } p \text{ com } p=1}_{\text{ou série harmônica}}$ $\therefore$ diverge)

2º) $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{5n^3-n+1} \div \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3-n}{5n^3-n+1} \right)$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}(1-\frac{1}{n^2}{}^{\,0})}{\cancel{n^3}(5-\frac{1}{n^2}{}^{\,0}+\frac{1}{n^3}{}^{\,0})} = \frac{1}{5}$

Como $0 < l < +\infty$, as duas têm o mesmo caráter. Logo, a série dada é divergente.

b) $\sum_1^\infty \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5}+\sqrt[5]{n^3}} = \sum_1^\infty \frac{n^{1/2}}{n^{5/3}+n^{3/5}}$

1º) Criar $\sum_1^\infty b_n$

$\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{n^{1/2}}{n^{5/3}} = \sum_1^\infty n^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}} = \sum_1^\infty n^{-7/6} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{7/6}}$

(A série p com $p = \frac{7}{6}$ $\therefore$ convergente)

2.º) Calcular $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{1/2}}{n^{5/3} + n^{3/5}} \div \frac{n^{1/2}}{n^{5/3}} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{n^{1/2}} \cdot n^{5/3}}{(n^{5/3} + n^{3/5})\, \cancel{n^{1/2}}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{5/3}}{n^{5/3} + n^{3/5}} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{5/3}}{n^{5/3} \left(1 + \frac{n^{3/5}}{n^{5/3}} \right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^{5/3}}}{\cancel{n^{5/3}} \left(1 + \frac{1}{n^{16/15}} \right)} = 1$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas têm o mesmo caráter, logo a série dada é convergente

c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

1.º) Achar $\sum_{1}^{\infty} b_n$

$\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (A série p com $p = 2$ ∴ convergente)

2.º) $l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}(n+1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas têm o mesmo caráter, logo a série dada é convergente.

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^3+3n+1}$ Resp: $\Sigma bn = \Sigma \frac{1}{n^{8/3}}$ $l=1$ Converge

e) $\sum_{2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2+5}$

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^3+3n+1}$

1º) Achar $\sum_{1}^{\infty} bn$

$\sum_{1}^{\infty} bn = \sum_{1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3} = \sum_{1}^{\infty} n^{1/3-3} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{8/3}}$ (série p com $p = \frac{8}{3}$ ∴ convergente)

2º) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{bn}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{1/3}}{n^3+3n+1} \div \frac{1}{n^{8/3}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^3}{n^3+3n+1} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^3} \cdot (1)}{\cancel{n^3}\left(1 + \cancel{\frac{3}{n^2}}^{0} + \cancel{\frac{1}{n^3}}^{0}\right)} = 1$$

; Como $0 < l < \infty$, as duas têm o mesmo caráter, logo, a série dada converge.

e) $\sum_{2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2+5}$

1º) Achar $\sum_{2}^{\infty} bn$

$\sum_{2}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p com $p=1$ ∴ Divergente)

2º) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{bn}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{n^2+5} : \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \ln n}{n^2+5} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2} \ln n}{\cancel{n^2}\left(1 + \cancel{\frac{5}{n^2}}^{0}\right)} = \infty$$

Como $l = \infty$ e $\sum_{2}^{\infty} bn$ diverge, então $\sum_{2}^{\infty} a_n$ converge.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3\sqrt{n}}{n}$

1º) Achar $\sum_{1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n} = \sum_{1}^{\infty} n^{-1/2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$ (série p com $p = \frac{1}{2}$ ∴ Divergente)

2º) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+3\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{(1+3n^{1/2}) \cdot n^{1/2}}{n}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{1/2} + 3n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}\left(3 + \cancel{\frac{1}{n^{1/2}}}^{\,0}\right)}{\cancel{n}} = 3$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas têm o mesmo caráter, logo, a série dada é divergente.

Na aula passada

Critério da comparação por limites

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- $0 < l < +\infty$: as 2 têm o mesmo caráter
- $l = 0$ e $\sum b_n$ converge: $\sum a_n$ converge
- $l = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge: $\sum a_n$ diverge

Série p

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$p \leq 1$: diverge

$p > 1$: converge

Continuação ...

Avalie o caráter da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

1.º) Criar $\sum_{1}^{\infty} b_n$

$\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p com $p=2>1$ ∴ converge)

2.º) $l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}\right)} = 1$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas têm o mesmo caráter. Logo, a série dada é convergente.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{9n^2+1}}$ (Prova antiga)

1.º) Criar $\sum_{1}^{\infty} b_n$

$\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ (série p, com $p<1$ ∴ diverge)

2.º) $l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9n^2+1}} : \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{9n^2+1}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{9n^2+1}}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[3]{\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(9 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

Como $0 < l < +\infty$ as duas têm o mesmo caráter, logo, a série dada é divergente.

Ex 149 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

1º) Criar $\sum_1^{\infty} b_n$

$$\sum_1^{\infty} b_n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(série } p\text{, com } p \leq 1 \text{: diverge)}$$

2º) $l = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0})}} = 1$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas séries têm o mesmo caráter, logo a série dada é divergente.

Ex $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$ Obs.: Lembrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{arctg} n = \dfrac{\pi}{2}$

1º) Criar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_1^{\infty} b_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{(série } p\text{, como } p > 1 \text{ converge)}$$

2º) $l = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} n}{\cancel{n^2}} \div \frac{1}{\cancel{n^2}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas séries têm o mesmo caráter, logo a série dada diverge.

Critério da comparação por desigualdade

Sejam $\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ duas séries positivas

a) Se $\forall n \in N$, temos $a_n \leq b_n$ (neste caso $\sum_1^\infty b_n$ é majorante de $\sum_1^\infty a_n$) e $\sum_1^\infty b_n$ converge, então $\sum_1^\infty a_n$ também converge

b) Se $\forall n \in N$, temos $a_n \geq b_n$ (neste caso, $\sum_1^\infty b_n$ é minorante de $\sum_1^\infty a_n$) e $\sum_1^\infty b_n$ diverge, então $\sum_1^\infty a_n$ também diverge.

Obs.: $\sum_1^\infty a_n$ série dada

$\sum_1^\infty b_n$ série que você cria

Revisão

Série geométrica $\begin{cases} |q|<1 & \text{converge} \\ |q|\geq 1 & \text{diverge} \end{cases}$

Ex: $\sum_1^\infty 4^n$ $q=4$ Diverge

$\sum_1^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $q=\frac{2}{3}$ Converge

$\sum_1^\infty \frac{1}{5^n}$ $q=5$

$\sum_1^\infty \left(\frac{3}{2}\right)^n$ $q=\frac{3}{2}$ Diverge

Série p

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p\leq 1 & \text{Diverge} \\ p>1 & \text{converge} \end{cases}$

Ex: Estude o caráter da série

a) $\sum_1^\infty \frac{1}{2+5^n}$

1º) $\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{5^n}$ (série geométrica, com $q=5$; $q>1$ diverge)

2º) $\underbrace{\frac{1}{2+5^n}}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{5^n}}_{b_n}$ Como $\sum_1^\infty \frac{1}{5^n}$ é majorante e convergente, a série dada também converge.

Ex: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^{1/2}-1}$

1º) $\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ (série p; $p<1$ ∴ Diverge)

2º) $\frac{3}{n^{1/2}-1} \geq \frac{1}{n^{1/2}}$

Como $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ é minorante e diverge, a série dada também diverge.

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ (prova antiga)

1º) $\sum_{1}^{\infty} b_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (série geométrica, $q<1$ ∴ converge)

2º) $\frac{1}{2+3^n} \leq \frac{1}{3^n}$

Como $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ é majorante e convergente, logo a série dada também converge

Ex: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$

$\ln n \leq n$

$\frac{\ln n}{n^4} \leq \frac{n}{n^4}$

$\frac{\ln n}{n^4} \leq \frac{1}{n^3}$

Como $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é majorante e convergente, a série dada também converge.

Obs:

1-) Se uma série de termos positivos converge, então a série obtida por um agrupamento arbitrário de seus termos também converge

2-) Os critérios deste tópico podem ser aplicados para séries que são positivas a partir de um índice k natural ou para séries que satisfaçam as condições do critério a partir de um índice k natural

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+16}$, que descreve apartir de $n=5$

p/ casa exerc p. 38 a 45

Ex 92) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}$ (pela razão)

↳ Produtório

Obs.:

$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1.3.5.7.9.[\ldots].(2n-1)$

$\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 1.3.5.7.9.[\ldots].(2n-1).[2(n-1)-1]$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^{(n+1)}(2k-1)} : \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{1.3.5\ldots(2n-1)}(2(n+1)-1)} \cdot \frac{\cancel{1.3.5\ldots(2n-1)}}{\cancel{n!}} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n}{}^{0})}{\cancel{n}(2+\frac{1}{n}{}_{0})} = \frac{1}{2} < 1.$$

∴ Converge (pela razão)

Séries alternadas

Uma série numérica que apresenta seus termos alternadamente positivos e negativos é denominada série alternada.

Indicação $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \cdots$

↳ gerador de sinais

$(a_n > 0)$

Exemplos:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{2^n} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$

Teorema de Leibniz ⚠ (Só para séries alternadas)

Se uma série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ apresenta termos decrescentes em valor absoluto e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então ela converge, sua soma é positiva e menor que a_1.

Obs.: Se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ for convergente, então o erro cometido ao se aproximar S (soma da série) por S_n (soma dos n primeiros termos) é menor que a_{n+1}, ou seja:

$$|S - S_n| < a_{n+1}$$

Ex: $|S - S_{10}| < a_{11}$

$|S - S_{15}| < a_{16}$

Exercícios

Estudar a convergência das séries alternadas usando o teorema de Leibniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$

1°) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

2°) decrescente?

Seja $f(n) = \frac{1}{n^3}$

$f'(n) = -3n^{-4} = \frac{-3}{n^4} < 0$

Seja $f(n)$ é decrescente e, consequentemente, os termos da série decrescem (em valor absoluto).

Por Leibniz, a alternada converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$

1.º) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0})}} = 0$$

2.º) decrescente?

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = (n+1)^{-1/2}, \forall n \geq 1$$

$$f'(n) = -\frac{1}{2} \cdot (n+1)^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{(n+1)^3}} < 0$$

Logo $f(n)$ é decrescente, e, consequentemente, os termos da série decrescem (em valor absoluto)

Por Leibniz, a alternada converge

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$

1.º) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n(2-\underbrace{\frac{1}{n}}_{0})]!} = 0$$

2.º) decrescente ?

$a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\{2(n+1)-1\}!} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$$

temos que

$$\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{(2n-1)!}$$

Logo, os termos diminuem (em valor absoluto) Por Leibniz, a série alternada converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{5n+1}$

Obs: lembrar que

se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pelo TCN a série diverge

1°) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2+\cancel{3/n}^{\,0})}{\cancel{n}(5+\cancel{1/n}^{\,0})} = \frac{2}{5}$$

Não podemos avaliar por Leibniz, mas pelo TCN podemos garantir que a série diverge.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$

1°) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$(D(a^u) = a^u \ln a \cdot u'$

2°) decrescente?

$f(n) = \frac{1}{2^n}, \ \forall n \geq 1$

$f'(n) = 2^{-n} \cdot \ln 2 \cdot (-1) < 0$

Logo, f é decrescente e os termos da série decrescem (em valor absoluto). Por Leibniz, a alternada converge

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(n\pi)}{3n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{3n^2+1}$

gerador

1°) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(3+\cancel{1/n^2}^{\,0})} = \frac{1}{3}$$

Não podemos avaliar por Leibniz, mas pelo TCN podemos garantir que a série diverge.

Ex 170) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$

Arrumar no livro

1º) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$?

$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = 0$

2º) decrescente?

$f(n) = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$; $\forall n \geq 2$

$f'(n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n^2} < 0$

$+$ $-$

Logo f é decrescente, logo os termos dessa decrescem (em valor absoluto) Por Leibniz a alternada converge.

Classificação das séries alternadas

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ uma série alternada e considerar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a série em valor absoluto (os termos considerados em módulo). Temos que:

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então a alternada também converge e é denominada absolutamente convergente

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então a alternada pode convergir ou divergir

- Se a alternada converge, temos a convergência condicional
- Se a alternada diverge, temos a divergência.

Resumo

Classificação das alternadas

- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.C, então a alternada C $\rightarrow$ Absolutamente convergente (AC).

- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.D
  - alternada C $\rightarrow$ Condicionalmente convergente (CC) (por Leibniz)
  - alternada D $\rightarrow$ Divergente (D)

<u>Ex:</u> Classifique as séries alternadas em AC, CC ou D

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^5}$

1º) Em valor absoluto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$$ (série p, com $p=5>1$ $\therefore$ converge)

2º) alternada

Como $\Sigma |a_n|$ converge, a alternada também converge

Classificação: abs. converge (AC).

Ex: 169 a 179 HOMEWORK

Pegar matéria anterior

Série de funções de x

São séries nas quais o termo geral gera pelo menos uma função de x

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.3^n} = \frac{x^1}{1.3^1} + \frac{x^2}{2.3^2} + \frac{x^3}{3.3^3} + \ldots$

Domínio de convergência

Dada uma série de funções de x, para cada valor de x fixado obtém-se uma série numérica, que pode ser convergente ou divergente.

O conjunto dos valores de x para os quais são obtidas séries numéricas convergentes é chamado de domínio de convergência.

Séries de potências

A série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ é uma série de potências. O domínio de convergência de uma série de potências com coeficientes reais é um intervalo centrado em x_0, com raio de convergência R.

Ex: Determine o domínio de convergência da série

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n.9^n}$

(*) Importante

1º modo de resolução: usando o critério da razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \begin{cases} l<1 & C \\ l>1 & D \\ l=1 & ? \end{cases}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(x-1)^{(n+1)}}{(n+1).9^{(n+1)}} : \frac{(x-1)^n}{n9^n} \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\cancel{(x-1)^n}(x-1).\,n\cancel{9^n}}{(n+1)\,\cancel{9^n}.9.\cancel{(x-1)^n}} \right\}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n(x-1)}{9(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(x-1)}{\cancel{n}(9+\frac{9}{n})} = \left|\frac{x-1}{9}\right|$$

$$\frac{|x-1|}{9} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{9} < 1 \Rightarrow x-1 < 9 \therefore x < 10 \\ \frac{-x+1}{9} < 1 \Rightarrow -x+1 < 9 \Rightarrow -x < 8 \therefore x > -8 \end{cases}$$

ou

$$\frac{|x-1|}{9} < 1 \Rightarrow |x-1| < 9 \Rightarrow -9 < x-1 < 9 \quad -8 < x < 10$$

D $\quad -8 \quad$ C $\quad 10 \quad$ D

② Análise dos extremos

a) Se $x = -8$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8-1)^n}{n \cdot 9^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n 9^n}$$

Obs.: $(-9)^n = [9(-1)]^n = 9^n (-1)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{9^n}(-1)^n}{n \cdot \cancel{9^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Revisão: $\Sigma |a_n|$ C $\to$ alt C $\to$ AC

$\Sigma |a_n|$ D $\to$ alt C (Leibniz) $\to$ CC

$\quad\quad\quad\;\;\to$ alt D $\to$ D

• $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie harmonica: diverge)

• alternada por Leibniz $\to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;\to$ decresc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

decrescente?

$f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \geq 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ∴ decrescente

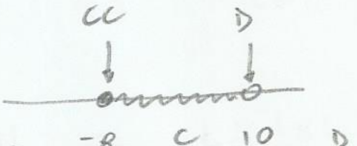
Logo, por Leibniz, a alternada converge

A alternada é Cond. convergente.

b) Se $x = 10$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{9^n}}{n \cdot \cancel{9^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(série positiva / é a série harmónica diverge)



R: Domínio de convergência: $[-8, 10[$

2º modo de resolução

Se existe o limite $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge em $|x - x_0| < R$ e diverge em $|x - x_0| > R$, sendo R o raio de convergência.

No exercício $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \frac{1}{n \cdot 9^n}$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 9^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot 9^{(n+1)}}{1} \right|$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)\, \cancel{9^n} \cdot 9}{n \cdot \cancel{9^n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{n}(9 + \cancel{9/n})}{\cancel{n}} \right| = 9$$

A série converge em $|x - x_0| < R$

$|x - 1| < 9$

$-9 < x - 1 < 9$

$-8 < x < 10$

Depois realizar a análise dos extremos

$R = [-8, 10[$

Ex 209)

Domínio de convergência $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$

$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ $l < 1$ C, $l > 1$ D, $l = 1$?

$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1) x^{(n+1)}}{2^{(n+1)}} : \frac{n . x^n}{2^n} \right| < 1$

$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1) \cancel{x^n} . x \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} . 2 . n . \cancel{x^n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1) x}{2n} \right| < 1$

$l = |x| . \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{n}(1 + 1/\cancel{n})}{2 \cancel{n}} \right| = \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2$

$-2 < x < 2$ D -2 C 2 D

Análise dos extremos

a) Se $x = -2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n . (-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n . [2 . (-1)]^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n . \cancel{2^n} . (-1)^n}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1} n (-1)^n$

(Alternada)

. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n$ (Pelo TCN, como $\lim_{n \to \infty} n = \infty \neq 0$, a série diverge)

. alternada por Leibniz

Não podemos analizar por Leibniz, pois o $\lim_{n \to \infty} n \neq 0$, mas pelo TCN ela diverge.

b) Se $x = 2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n . \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ (positiva)

Pelo TCN, com $\lim_{n \to \infty} n = \infty \neq 0$, ela diverge

Resposta: Domínio de convergência $]-2, 2[$

Ex: 211) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \begin{cases} l < 1 & C \\ l > 1 & D \\ l = 1 & ? \end{cases}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{x^n}\, x\, \cancel{n!}}{(n+1)\,\cancel{n!}\,\cancel{x^n}} \right| = 0$$

∴ A série converge para qualquer valor de x.

R: Domínio conver $\mathbb{R}$

Ex: 217) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n . n!$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \begin{cases} l < 1 & C \\ l > 1 & D \\ l = 1 & ? \end{cases}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-1)^{(n+1)} . (n+1)!}{(x-1)^n \; n!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(x-1)^n}(x-1) . (n+1) . \cancel{n!}}{\cancel{(x-1)^n} . \cancel{n!}} \right| = \infty$$

$$l = |x-1| \lim_{n \to \infty} (n+1) < 1 \qquad |x-1| . \infty < 1$$

Neste caso converge apenas para $x = x_0$

Domínio convergência : $\{1\}$

Ex prova antiga Determine o domínio de convergência

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} (-1)^n \qquad \text{Resp: } [-1, 1]$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} . (-1)^{(n+1)}}{(n+1)^2} : \frac{x^n . (-1)^n}{n^2} \right|$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{x^n} . x . \cancel{(-1)^n} . (-1) . n^2}{(n+1)^2 \, \cancel{x^n} . \cancel{(-1)^n}} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)\, n^2}{n^2 + 2n + 1} \right|$$

$$l = |x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)\, \cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right| < 1 \qquad |x| < 1 \qquad -1 < x < 1$$

2) Análise dos extremos

a) Se $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ (série positiva)}$$

Série p com $p = 2 > 1 \therefore$ converge

b) Se $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \text{ (série alternada)}$$

. Em valor absoluto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

série p com $p = 2 > 1 \therefore$ converge

Neste caso, a alternada também converge e é absol convergente.

R: Domínio de convergência $[-1, 1]$

ou $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Ex 223 do livro

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1}$$

1º) $l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

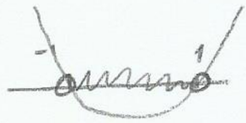
$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+3}}{2n+3} : \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} \right| < 1$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^n} (-1)^2 \cancel{x^{2n}} \cdot x^{\cancel{3}\,2} \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot \cancel{(-1)^n} (-1) \cdot \cancel{x^{2n}} \cdot \cancel{x}} \right| < 1$$

$l = |x^2| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2n+1}{-2n-3} \right| < 1 \quad l = |x^2| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n(2 + 1/n)}{n(-2 - 3/n)} \right| < 1$

$|x^2| < 1 \quad \rightarrow \quad x^2 < 1 \quad x^2 - 1 < 0$

$x = \pm 1$



Logo $-1 < x < 1$

2º) Análise dos extremos

a) Se $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+2}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n} + (-1)^2}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^{3n}$$

(série alternada)

· Em valor absoluto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

(Por comparação por limite)

$\sum_{n=1} b_n = \sum_{n=} \frac{1}{n}$ (série harmônica divergente)

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2}$$

Como $0 < l < +\infty$, as duas tem o mesmo caráter, logo, a série em valor absoluto diverge.

. alternada (por Leibniz)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

decrescente?

Seja $f(n) = \frac{1}{2n+1}$, $\forall x \geq 1$

$f'(n) = ?$

$f(n) = (2n+1)^{-1}$

Então $f'(n) = -1(2n+1)^{-2} \cdot 2$

$= \frac{-2}{(2n+1)^2} < 0$

$\therefore$ os termos decrescem (em valor absoluto)

Por Leibniz, a série alternada converge (é cond convergente).

b) Se $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^{n+1} \text{ (série alternada)}$$

Pela análise do item anterior, ela é cond. convergente.

R: Domínio de convergência $[-1,1]$

Série de Taylor e Série de Mac-Lauren

A série de Taylor é o desenvolvimento de uma função f, derivável pelo menos até a ordem $(n+1)$, em uma série de potências de $(x-x_0)^n$, dada por:

$$f(x) = \frac{f(x_0)(x-x_0)^0}{0!} + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Se $x_0 = 0$, a série é denominada Série de Mac-Laurin

Obs.: É importante observar que a igualdade $\underbrace{f(x)}_{\text{Função}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}_{\text{série}}$

só tem sentido para os valores de x que pertencem ao domínio de convergência da série.

Aplicações das séries de potências

- representar funções nas calculadoras / computadores
- integrar funções que não têm primitivas elementares

$Ex: \int e^{-x^2} dx$

- Na Física: análise de fenômenos pela troca da funções pelos primeiros termos da série que a representa.

Ex: Expandir $f(x) = e^x$ em uma série de Taylor nas vizinhanças do ponto $x_0 = 1$. Determine o termo geral da série e seu domínio de convergências.

1º) $f(x) = e^x$

$f(x_0) = f(1) = e^1 = e$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(x_0) = f'(1) = e^1 = e$

$f''(x) = e^x \rightarrow f''(x_0) = f''(1) = e^1 = e$

$f'''(x) = e^x \rightarrow f'''(x_0) = f'''(1) = e^1 = e$

$f^{IV}(x) = e^x \rightarrow f^{IV}(x_0) = f^{IV}(1) = e^1 = e$

2º) Expansão

$$e^x = \frac{e(x-1)^0}{0!} + \frac{e(x-1)^1}{1!} + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \frac{e(x-1)^3}{3!} + \frac{e(x-1)^4}{4!} + \dots$$

3º) Termo Geral

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!} \quad \text{ou} \quad e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

4º) Domínio de convergência

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{e(x-1)^{n}}{n!}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{e(x-1)^{n}}(x-1)\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\cancel{e(x-1)^{n}}}\right|<1$$

$$|x-1|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|<1 \quad \text{(verdadeiro)}$$

0

Domínio convergência: $\mathbb{R}$
(a igualdade entre a função e a série tem sentido p/ qualquer x real.)

Ex: 244 p72

Expansão de $f(x)=e^{2x}$ em uma série de Mac Laurin, Determine o termo geral e o domínio de convergência $x_0=0$

1º) $f(x)=e^{2x}$

$f(x_0)=f(0)=e^{2\cdot 0}=1$

$f'(x_0)=2e^{2x} \to f'(0)=2$

$f''(x_0)=4e^{2x} \to f''(0)=4$

$f'''(x_0)=8e^{2x} \to f'''(0)=8$

$f^{IV}(x_0)=16e^{2x} \to f^{IV}(0)=16$

2.º) Expansão

$$e^{2x} = \frac{x^0}{0!} + \frac{2 \cdot x^1}{1!} + \frac{4 \cdot x^2}{2!} + \frac{8\ x^3}{3!} + \frac{16 \cdot x^4}{4!} + \dots$$

3.º) Termo Geral

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cdot 2^n}{n!}$$

4.º) Domínio de Convergência

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} \cdot 2^{(n+1)}}{(n+1)!} : \frac{x^n \cdot 2^n}{n!} \right| < 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cancel{2^n} \cdot 2\ \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\ \cancel{x^n}\ \cancel{2^n}} \right| < 1 \quad \to \quad \overbrace{|2x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right|}^{0} < 1$$

(verdade)

Dom. convergência: $\mathbb{R}$

(a igualdade entre a função e a série tem sentido p/ qualquer x real)

p/ casa

Achar o domínio de convergência

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} (-1)^n$ R: $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{5n+2}$ R: $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$

Exerc. p.63

Exercícios de prova antiga

1. Desenvolver $f(x) = \ln(1+x)$ em uma série de $\underline{\text{Mac-Laurin}}$. Ache o termo geral (Valor: 2 pontos)

$\hookrightarrow x_0 = 0$

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{IV}(x) = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow f^{IV}(0) = -6$

$f^{V}(x) = 24(1+x)^{-5} \Rightarrow f^{V}(0) = 24$

2º) Desenvolvimento

$$f(x) = \frac{f(x)(x-x_0)^0}{0!} + \frac{f'(x)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x)(x-x_0)^{II}}{2!} + \frac{f'''(x)(x-x_0)^{III}}{3!} \dots$$

$$\ln(x+1) = \frac{(1)\, x^1}{1!} + \frac{(-1)\, x^2}{2!} + \frac{2\, x^3}{3!} + \frac{(-6).\, x^4}{4!} + \frac{24.\, x^5}{5!} + \dots$$

$$\ln(x+1) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{6x^4}{24} + \frac{24x^5}{120} +$$

$$\ln(x+1) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

3º) Termo Geral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$$

2. Desenvolver $f(x) = \sin(3x)$ em uma série de $\underline{\text{Mac-Laurin}}$. Ache o termo geral e o domínio de convergência (Valor: 3 pontos)

$x_0 = 0$

$f(x) = \sin(3x) \therefore f(0) = 0$

$f'(x) = 3\cos(3x) \therefore f'(0) = 3$

$f''(x) = -9\sin(3x) \therefore f''(0) = 0$

$f'''(x) = -27\cos(3x) \therefore f'''(0) = -27$

$f^{IV}(x) = 81\sin(3x) \therefore f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = 243\cos(3x) \quad f^{V}(0) = 243$

$f^{VI}(x) = -729\sin(3x) \quad f^{VI}(0) = 0$

$f^{VII}(x) = -2187\cos(3x) \quad f^{VII}(0) = -27187$

$$\sin(3x) = \cancel{\frac{0 \cdot x^0}{0!}} + \frac{3x^1}{1!} + \cancel{\frac{0x^2}{2!}} - \frac{27x^3}{3!} + \cancel{\frac{0x^4}{4!}} + \frac{243x^5}{5!} + \cancel{\frac{0x^6}{6!}} - \frac{27187\, x^7}{7!}$$

$$3^1 \qquad 3^3 \qquad 3^5 \qquad 3^7$$

$$\sin(3x) = \frac{3x^1}{1!} - \frac{27x^3}{3!} + \frac{243x^5}{5!} - \frac{27187x^7}{7!}$$

Termo Geral

par: $2n$

impar: $2n+1$ ou $2n-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n$$

Dominio de convergência

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{2(n+1)+1}\, x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} : \frac{3^{2n+1}\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{2n+3}\, x^{2n+3}}{(2n+3)!} : \frac{3^{2n+1}\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{3^{2n}}\, \cancel{3}^2 \cdot \cancel{x^{2n}}\, x^{\cancel{3}\,2} \cdot \cancel{(2n+1)}\, \cancel{2n!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)}\cancel{(2n!)}\, \cancel{3^{2n}} \cdot \cancel{3}\, \cancel{x^{2n}} \cdot x} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^2 x^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| < 1 \sim |x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{9}{4n^2+10n+6} \right| < 1$$

$$0$$

$0 < 1$ (verdade)

Dominio convergencia: $\mathbb{R}$ (converge $\forall x$ real)

3. Desenvolver $f(x) = \cos(3x)$ em uma série de Mac Laurin. Ache o termo geral e o domínio de convergência.

(Resp: $\cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^3}{4!} - \frac{729x^4}{6!} +$

$\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} x^{2n} (-1)^n}{(2n)!}$ Dominio converg. $\mathbb{R}$ (converge $\forall x$ real)

4. Desenvolver $f(x) = \frac{4}{1+x}$ em uma série de Mac Laurin. Determine o termo geral e o domínio de convergência.

R: $\frac{4}{1+x} = 4 - 4x + 4x^2 - 4x^3 + \dots$

$\frac{4}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4x^n (-1)^n$

Dom. con. $I =]-1, 1[$

Obs:

Se $x = 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ (diverge, não existe $\lim_{n \to \infty} S_n$)

Se $x = -1$ $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ (diverge - TCN)

Prova antiga - 2009

1. Estude a convergência ou divergência da série.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n^3 - 5}}$ R: Converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \cdot n!$ R: Converge

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n}{e^n + 1}$ R: diverge $l = 1 \neq 0 \therefore D$

2. Determine a convergência (absoluta ou condicional) ou divergência da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ R: Cond. convergente.

3) Desenvolver $f(x) = \operatorname{sen}(-4x)$ em uma série de Mac Laurin. Escreva o termo geral e ache o domínio de convergência

R: $\operatorname{sen}(-4x) = -\dfrac{4x^1}{1!} + \dfrac{64x^3}{3!} - \dfrac{1024x^5}{5!} + \dfrac{16384x^7}{7!} - \ldots$

$$\operatorname{sen}(-4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^{n+1}$$

Domínio convergência: $\mathbb{R}$ (converge $\forall x$ real)

4) Dada a série de potências $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ determine o seu domínio de convergência.

R: $I = [0, 2[$

Obs.: Se $x = 0$, temos $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (CC)

Se $x = 2$; temos $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (D)

Obs.: Corrigir resp. do exercício proposto da aula passada

Escrever $f(x) = \dfrac{4}{1+x}$ em série de Mac Laurin

- Se $x = 1$: $\sum_{1}^{\infty} 4(-1)^n$ (D, não existe $\lim_{n \to \infty} S_n$)
- Se $x = -1$: $\sum_{1}^{\infty} 4$ (D, pelo TCN)

Resumo

TCN: exp num $\geq$ exp den

Razão: $\begin{cases} \text{pot} \\ \text{fatorial} \\ n^n \end{cases}$

Raiz enésima $(\ )^n$

Com. limites: expo do denomi. é > num

Resolução:

1-) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n^3-5}}$

Através do critério da comparação por limites temos

$$\sum^{\infty} bn = \sum_{n=1} \frac{n^0}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

(série p, com $p = \frac{3}{2} > 1$, portanto, converge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{bn} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7n^3-5}} : \frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{\sqrt{n^3}}}{\cancel{\sqrt{n^3}} \cdot \sqrt{7 - \underbrace{\frac{5}{n^3}}_{0}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} < 1$$

Como $0 < l < \infty$, as duas séries tem o mesmo critério, portanto converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \cdot n!$ $\quad \left(l = \frac{2}{e} < 1 \right)$

Através do critério da razão, temos:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{an+1}{an} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n\, n!}{n^n} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{2^n} \cdot 2\, \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}\, n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}\, \cancel{2^n}\, \cancel{n!}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\, n^n}{(n+1)^n} \right)$$

$$l = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

Como $l < 1$, a série converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n+n}{e^n+1}$

Através do Teorema da Condição necessária, temos:

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+n}{e^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+1}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^n}(1+\cancel{\frac{1}{e^n}}^{0})}{\cancel{e^n}} = 1$$

Como $l = 1 \neq 0$, a série diverge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+9)}}$

1º) Analizar o critério de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, se convergente, não precisa utilizar Leibniz, pois é Absolutamente convergente, caso seja divergente, utilizar Leibniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+9n}}$$

Através da comparação por limites temos.

$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p, com $p=1$, portanto diverge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+9n}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\cancel{\frac{9}{n^2}}}} \right) = 1$$

Como $0 < l < \infty$, a série tem o mesmo critério que b_n, Portanto a série Diverge.

2º) Como é divergente, devemos aplicar $\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+9n}} = \lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}}^{0} = 0$$

3º) $|a_n'| < 0$

$f(x) = (x^2+9x)^{-1/2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2+9x)^{-3/2} \cdot (2x+9) < 0$

∴ A série é condicionalmente convergente.

3) $f(x) = \operatorname{sen}(-4x)$ $\quad x_0 = 0$

$f'(x) = -4\cos(-4x) \to f'(x_0) = f'(0) = -4$

$f''(x) = -16\operatorname{sen}(-4x) \to f''(x_0) = f''(0) = 0$

$f'''(x) = 64\cos(-4x) \to f'''(x_0) = f'''(0) = 64$

$f^{IV}(x) = 256\operatorname{sen}(-4x) \to f^{IV}(x_0) = f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = -1024\cos(-4x) \to f^{V}(x_0) = f^{V}(0) = -1024$

$f^{VI}(x) = -4096\operatorname{sen}(-4x) \to f^{VI}(x_0) = f^{VI}(0) = 0$

$$\operatorname{sen}(-4x) = \frac{-4x^1}{1!} + \frac{64x^3}{3!} - \frac{1024x^5}{5!}$$

$(1,3,5,\dots) \Rightarrow 2n+1$

$$\operatorname{sen}(-4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^{n+1}$$

→ Para determinar o domínio de convergência, devemos realizar a seguinte relação $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Depois para analizar os extremos, deve substituir o valor de x pelo o valor dos extremos e determinar o carácter da série.

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Dom. converg.
R: (converg. $\forall x$ real)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{2n+3} \cdot x^{2n+3}}{(2n+3)!} : \frac{4^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{2n} \cdot 4^{3^2} \cdot x^{2n} \cdot x^{3^2} \cdot \cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!} \cdot 4^{2n} \cdot 4^1 \cdot x^{2n} \cdot x^1} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^2 \cdot x^2}{4n^2+10n+6} \right| < 1 \sim |16x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{4n^2+10n+6} \right| < 1$$

0

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \right| < 1$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-1)^n}(x-1)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\,\cancel{(x-1)^n}} \right| < 1 \sim |x-1| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}} \right| < 1$

$|x-1| < 1 \sim -1 < x-1 < 1$

$0 < x < 2$

a) Para $x=0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right|$ (série p, com $p = \frac{1}{2} < 1$, Portanto a série Diverge)

$C_1)$ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = 0$

$C_2)$ $f(n) = n^{-1/2}$

$f'(n) = -\frac{1}{2}(n^{-3/2}) = \frac{-1}{2\sqrt{n^3}} < 0$

$\therefore$ Condicionalmente Convergente

b) Para $x=2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (série p, com $p = \frac{1}{2} < 1$, Portanto Diverge)

R: $I = [0, 2[$, sendo $x=0$ CC

sendo $x=2$ D

Critérios para análise do caráter de uma série

- Teorema da condição necessária (TCN) => Usar geralmente quando o grau do numerador $\geq$ grau denominador

  × Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou não Existe : A série é divergente

  × Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$: nada podemos concluir.

- Critério da comparação por limites => Usar quando o grau do numerador $<$ grau do denominador.

  Sendo duas séries positivas $\sum^{\infty} a_n$ (dada no exercício) e $\sum b_n$, que será determinada, pegando a incógnita do numerador e do denominador com maior grau.

  Exemplo para determinar b_n: $\sum_{1}^{\infty} a_n \; \frac{n^2-1}{5n^3-n+1} \;\therefore\; \sum_{1}^{\infty} b_n \; \frac{n^2}{n^3}$

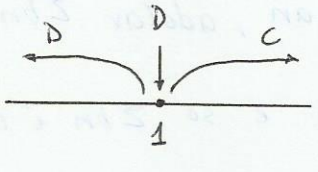
$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \begin{cases} 0 < l < \infty : \text{as duas séries têm o mesmo critério} \\ l = 0 \text{ e } b_n = C \text{ então } a_n = C \\ l = \infty \text{ e } b_n = D \text{ então } a_n = D \end{cases}$$

Caso contrário nada podemos concluir.

Série "p" (série harmônica generalizado)

$\sum \frac{1}{n^p}$ se $p \leq 1$ D

se $p > 1$ C



Série geométrica

$\sum a.q^n$ Se $|q| < 1$ C

Se $|q| \geq$ D

- Critério da razão ou D'Alembert => Usar quando aparecer no termo Geral (! ; n^n ; $(n^e)^n$)

$l = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\begin{cases} \text{Se } l < 1 \text{ a série é convergente} \\ \text{Se } l > 1 \text{ a série é divergente} \\ \text{Se } l = 1 \text{ nada podemos concluir} \end{cases}$

- Critério da raiz n-ésima => Usar quando o termo geral estiver elevada a "n".

$l = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\begin{cases} \text{Se } l < 1 \text{ a série é convergente} \\ \text{Se } l > 1 \text{ a série é divergente} \\ \text{Se } l = 1 \text{ nada podemos concluir} \end{cases}$

- Critério da integral imprópria

1) Transformar a_n em $f(x)$
2) Verificar se $f'(x) < 0$
3) Resolver a integral imprópria $l = \lim\limits_{n \to \infty} \int_b^{\infty} f(x)\,dx$

- Se l = finito ∴ Convergente
- Se $l = \nexists$ ou ∞ ∴ Divergente

- Critério da comparação por desigualdades

Dada série $\sum a_n$, adotar $\sum b_n$ (série de caráter conhecido)

- se $a_n \leq b_n$ e se $\sum b_n$ é convergente então $\sum a_n$ é convergente
- se $a_n \geq b_n$ e se $\sum b_n$ é divergente então $\sum a_n$ é divergente.

- Critério de Raabe => Usar quando aparecer (! ; n^n ; $(n^e)^n$) e a Razão não resolver

$l = \lim\limits_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ $\begin{cases} \text{Se } l < 1 \text{ a série diverge} \\ \text{Se } l > 1 \text{ a série converge} \\ \text{Se } l = 1 \text{ nada podemos concluir} \end{cases}$

Séries alternadas

$\sum (-1)^n a_n$
- AC: Absolutamente Convergente
- CC: Condicionalmente Convergente
- D: Divergente

Exemplos de geradores: $(-1)^n$; $(-1)^{n+1}$; $\cos(n\pi)$

- Critério "teorema de Leibniz" (Válido somente para séries alternada)

Verificar as condições:

a) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ b) $|a_n'| < 0$

Concluindo...

× Se as duas condições são satisfeitas, então a série por Leibniz é C

× Se pelo menos umas delas não for satisfeita, então a série por Leibniz é D.

1º) Critério para positiva (série em módulo) (raiz, comparação, int, TCN, razão)	2º) Critério Leibniz	Conclusão
C	não usar	A.C
D	C	C.C
D	D	D

Exercícios (Cálculo Diferencial e Integral 3)

HOMEWORK

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

1°) Achar S_n

$S_1 = a_1 = \frac{1}{6}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$n^2 + 3n + 2 = 0$

$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $\quad n_1 = -1$ $\quad n_2 = -2$ $\quad \therefore \; n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{(n+2)A + (n+1)B}{(n+1)(n+2)} \rightarrow \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{An + 2A + Bn + B}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{(A+B)n + 2A + B}{(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} -A - B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \quad A = 1 \text{ e } B = -1$$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Com isso temos:

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right)$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\right)$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

2°) $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} - \cancelto{0}{\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ A série é convergente, cuja a soma da série é $\frac{1}{2}$

b) $\sum_{2}^{\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln n}$

$$\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n+1)\ln n} = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln(n+1)\ln n} = \frac{\cancel{\ln(n+1)}}{\cancel{\ln(n+1)}\ln n} - \frac{\cancel{\ln n}}{\ln(n+1)\cancel{\ln n}}$$

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

1°) Achar S_n

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}} + \cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \frac{1}{\ln 4}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}} + \cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \cancel{\frac{1}{\ln 4}} + \cancel{\frac{1}{\ln 4}} - \frac{1}{\ln 5}$$

$$S_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+2)}$$

2°) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln 2} - \overset{0}{\dfrac{1}{\ln(\cancel{n}+2)}} = \dfrac{1}{\ln 2}$

$\therefore$ É convergente, e sua soma é $\dfrac{1}{\ln 2}$

c) $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

1°) Achar S_n

$$S_1 = a_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}-\cancel{\sqrt{4}}+\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

$S_n =$?

LIVRO

5.) $a_n = \dfrac{n}{3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(3+\overset{0}{\cancel{2/n}})} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

6-) $a_n = \dfrac{6n-5}{5n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n-5}{5n+1} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(6-\overset{0}{\cancel{5/n}})}{\cancel{n}(5+\cancel{1/n})} = \frac{6}{5}$$

7-) $a_n = \dfrac{7-4n^2}{3+2n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7-4n^2}{3+2n^2} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(\overset{0}{\cancel{7/n^2}}-4)}{\cancel{n^2}(\cancel{3/n^2}+2)} = -2$$

8-) $a_n = -5$

$$\lim_{n\to\infty} -5 = -5$$

9-) $a_n = \sqrt{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

2

10-) $a_n = \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1} \sim \lim_{n \to \infty} \frac{6n^2+n-1}{n^3+1} \sim \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}(6+\cancel{\frac{1}{n}}^{0}-1)}{n^{\cancel{3}}(1+\cancel{\frac{1}{n^3}}^{0})}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1} = 0$$

11-) $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$

(Como provar que não existe)

$$\lim_{n \to \infty} 1 + (-1)^{n+1}$$

12-) $a_n = 8n + 1$

$$\lim_{n \to \infty} 8n + 1 = \infty$$

13-) $a_n = 1 + (0,1)^n$

$$\lim_{n \to \infty} 1 + (0,1)^n = 1$$

14-) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{3n}{n^2+4n+5}$

ℓ

41-) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$

$(2, 4, 6, 8, \dots)$ PA

$b_n = b_1 + (n-1)r$

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 2$

$b_n = 2 + 2n - 2$

$b_n = 2n$

$\therefore a_n = \frac{1}{2n}$

42-) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

$(1, 3, 5, 7, \dots)$ PA

$b_n = b_1 + (n-1)r$

$b_n = 1 + (n-1) 2$

$b_n = 1 + 2n - 2$

$b_n = 2n - 1$

$\therefore a_n = \frac{1}{2n-1}$

43-) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots$

$(1, 2, 4, 8, \dots)$ PG

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_n = 2^{n-1}$

$a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

44-) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$a_n = \frac{1}{n^2}$

45-) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$

46-) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \dots$

$(2, 4, 6, \dots)$

$b_n = b_1 + (n-1)r$

$b_n = 2 + (n-1) 2$

$b_n = 2 + 2n - 2$

$b_n = 2n$

$(5, 8, 11, \dots)$

$b_n = b_1 + (n-1)r$

$b_n = 5 + (n-1) 3$

$b_n = 5 + 3n - 3$

$b_n = 3n + 2$

$\therefore a_n = \frac{2n}{3n+2}$

47-) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots$ $\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

48-) $1 + \frac{1.3}{1.4} + \frac{1.3.5}{1.4.7} + \frac{1.3.5.7}{1.4.7.10} + \cdots$

$a_n = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{1.4.7\cdots(3n-2)}$

$(1, 3, 5, 7, \dots)$ $\qquad (1, 4, 7, 10, \dots)$

$b_n = b_1 + (n-1)r$ $\qquad b_n = b_1 + (n-1)r$

$b_n = 1 + (n-1)2$ $\qquad b_n = 1 + (n-1)3$

$b_n = 2n - 1$ $\qquad b_n = 3n - 2$

49) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ $\quad a_n = (-1)^{n+1}$

50) $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \cdots$

$a_n = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

51-) Determine, se existir, a soma da série $\sum_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}$, logo a série é convergente cuja soma é $\frac{1}{2}$

52-) Determine, se existir, a soma da série $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n}$

Dividindo S_n por 2, temos

$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

Somando $S_n + \frac{S_n}{2}$, temos

$S_n + \frac{S_n}{2} = 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

$\frac{3}{2} S_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

Verificar Propriedade do $\lim_{n \to \infty}$

53-) Determine, se existir, a soma da série: $\sum_{0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + \dots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2$

$S_3 = 1 + 2 + 4$

$S_n = 1 + 2 + 4 + \dots 2^n$

$2S_n = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n+1}$

$2S_n - S_n = -1 + 2^{n+1}$

$\therefore S_n = 2^{n+1} - 1$

$\lim_{n \to \infty} 2^{n+1} - 1 = \infty \quad \therefore$ A série é Divergente

54-) Determine, se existir, a soma da série $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \ldots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$\vdots$

$S_n = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 0, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$

$\therefore$ A série é divergente de acordo com o teorema da unicidade

55-) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

"Porque no livro fala que ela é divergente"

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} \sim \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(1)}{\cancel{n}(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \neq 0$$

56-) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \sim \lim_{n \to \infty} \frac{2n\sqrt{n^2 - n + 1}}{2n - 1} \sim$$

$f = (n^2 - n + 1)^{1/2}$

$f' = \frac{1}{2}(n^2 - n + 1)^{-1/2} \cdot (2n - 1)$

$= \frac{2n - 1}{2\sqrt{n^2 - n + 1}}$

$\sim \lim_{n \to \infty}$

Perguntar como eu calculo o limite

$g = 2n\sqrt{n^2 - n + 1}$

$g' = 2 \cdot \left(\sqrt{n^2 - n + 1} + n \cdot \frac{2n - 1}{2\sqrt{n^2 - n + 1}} \right)$

$= \cancel{2} \cdot \left(\frac{2(n^2 - n + 1) + n(2n - 1)}{\cancel{2}\sqrt{n^2 - n + 1}} \right)$

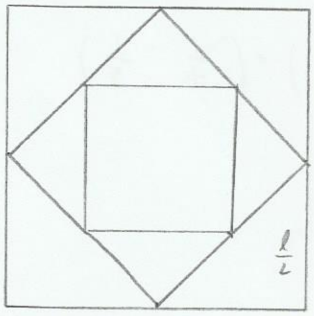
57-) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(n^{-1})}{n^{-1}} \sim \lim_{n \to \infty}$ (Dúvida)

Exercícios Propostos

60-)

61-)



$a_1 = l^2$

$a_2 = \frac{l^2}{2}$

$a_3 = \frac{l^2}{4}$ $\therefore a_n = n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{4}$

$S_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$?

62-) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

$n^2+3n+2=0$

$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $\quad n_1=-1 \quad n_2=-2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{(A+B)n+(2A+B)}{(n+1)(n+2)}$ $\quad \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2A+B=1 \\ A \quad =1 \end{cases} \therefore B=-1$

$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, Então:

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$S_2 = a_1+a_2 = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right)$

$S_3 = a_1+a_2+a_3 = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}\right)$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}$

63) $\sum_{2}^{\infty} \frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln(n+1)\ln n}$

$\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln(n+1)\ln n} = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln(n+1)\ln n} = \frac{\cancel{\ln(n+1)}}{\cancel{\ln(n+1)}\ln n} - \frac{\cancel{\ln n}}{\ln(n+1)\cancel{\ln n}}$

$$a_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \frac{1}{\ln 4}\right)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \cancel{\frac{1}{\ln 4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\ln 4}} - \frac{1}{\ln 5}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\ln 2}$$

64.) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

? Prokssovo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty}$$

65.) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n \cdot 2}$$

Exercício 46 a 54 (p18)

60 a 72 (p 24 e 25)

73 a 86 (pag 38 e 39)

125 até 136 . 42 e 43

62-1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{6}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$\vdots$

$n^2+3n+2=0$

$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $n_1 = -1$ $n_2 = -2$

$n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(A+B)n+2A+B}{(n+1)(n+2)} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \sim \begin{cases} -A-B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} A=1 \\ B=-1 \end{matrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{5}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ A série é divergente

63-) $\sum_{2}^{\infty} \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln(n+1) \cdot \ln n}$

$$\frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln(n+1) \cdot \ln n} = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln(n+1) \cdot \ln n} = \frac{\cancel{\ln(n+1)}}{\cancel{\ln(n+1)} \ln n} - \frac{\cancel{\ln n}}{\ln(n+1) \cancel{\ln n}}$$

$$= \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

1°) Achar S_n

$S_2 = a_1 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$

$S_3 = a_1 + a_2 = \frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}} + \cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \frac{1}{\ln 4}$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{\ln 2} - \cancel{\frac{1}{\ln 3}} + \cancel{\frac{1}{\ln 3}} - \cancel{\frac{1}{\ln 4}} + \cancel{\frac{1}{\ln 4}} - \frac{1}{\ln 5}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$

2°) $\lim_{n \to \infty} S_n$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln 2} - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2}$$

64-) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n}\cancel{\sqrt{n+1}}} - \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{n+1}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1} \cancel{- \frac{1}{\sqrt{2}}} \cancel{+ \frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{1} \cancel{- \frac{1}{\sqrt{2}}} \cancel{+ \frac{1}{\sqrt{2}}} \cancel{- \frac{1}{\sqrt{3}}} \cancel{+ \frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \underline{\underline{1}}$$

65) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$$

73-) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \dots$

$(3, 4, 5, 6, \dots)$

$b_n = b_1 + (n-1) r$

$b_n = 3 + (n-1) \cdot 1 \quad \therefore b_n = n+2$

$a_n = \frac{n}{n+2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1 + \cancel{\frac{2}{n}}^{0})} = 1 \neq 0$ divergente

74-) $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{16}{17} + \dots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1 + \cancel{\frac{1}{n^2}}^{0})} = 1 \neq 0$ diverge

75-) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$

$(1, 3, 5, 7, \dots)$

$b_n = b_1 + (n-1) r$

$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2$

$b_n = 2n - 1$

$a_n = \frac{n}{2n-1}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(2 - \cancel{\frac{1}{n}}^{0})} = \frac{1}{2} \neq 0$. De acordo com o TCN, diverge

76-) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \dots$

$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1 + \cancel{\frac{1}{n^2}}^{0}}} = 1 \neq 0$

De acordo com o TCN, diverge

77-) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{9}{\sqrt{11}} + \frac{16}{\sqrt{18}} + \dots$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}_{0}} = \infty \neq 0$$

De acordo com o TCN, diverge

78-) $\frac{1}{\sqrt{2^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{3^2-1}} + \frac{3}{\sqrt{4^2-1}} + \dots$

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{(n+1)^2-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}_{0}} = 1 \neq 0$$ De acordo com o TCN, diverge

79-) $\frac{1}{99} + \frac{2}{199} + \frac{3}{299} + \frac{4}{399} + \dots$

$$a_n = \frac{n}{100.n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(100-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{100} \neq 0$$

De acordo com o TCN, a série diverge

80-) $\frac{1}{1001} + \frac{2}{1002} + \frac{3}{1003} + \frac{4}{1004} + \cdots$

$a_n = \frac{n}{1000+n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\frac{1000}{n}^{0}+1\right)} = 1 \neq 0$

De acordo com o TCN
A série Diverge

81-) $\frac{0{,}01}{0{,}2} + \frac{0{,}02}{0{,}3} + \frac{0{,}03}{0{,}4} + \frac{0{,}04}{0{,}5} + \cdots$

$a_n = \frac{0{,}01 . n}{(1+n) . 0{,}1} = \frac{n}{100} : \frac{(n+1)}{10} = \frac{n}{100} . \frac{10}{(n+1)} = \frac{n}{(n+1) . 10}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1).10} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(10+\frac{10}{n}^{0}\right)} = \frac{1}{10} \neq 0$

De acordo com o TCN, a série é divergente.

82-) $1(e-1) + 2(\sqrt{e}-1) + 3(\sqrt[3]{e}-1) + \cdots$

$a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n\sqrt[n]{e} - n\right)$

?

83-) $\ln \frac{3^2}{3} + \ln \frac{4^2}{5} + \ln \frac{5^2}{7} + \cdots$

$a_n = \ln\left(\frac{(n+2)^2}{2n+1}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(\frac{(2n+2)^2}{2n+1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(4n^2+8n+4) - \ln(2n+1)\right] = \infty \neq 0$

De acordo com o teorema da Condição necessária, a série é divergente.

$$\overset{a_1}{}\quad\overset{a_2}{}\quad\overset{a_3}{}$$

84-) $2\,\text{arcsen}\,\frac{2}{2} + 3\,\text{arcsen}\,\frac{2}{3} + 4\,\text{arcsen}\,\frac{2}{4} + \dots$

$a_n = (n+1)\,\text{arcsen}\left(\frac{2}{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\,\text{arcsen}\left(\frac{2}{n+1}\right) =$

85-) $e^1\,tg\,\frac{1}{e} + e^2\,tg\,\frac{1}{e^2} + e^3\,tg\,\frac{1}{e^3} + \dots$

$a_n = e^n \cdot tg\,\frac{1}{e^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} e^n \cdot tg\left(\frac{1}{e^n}\right)$

86-) $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \dots$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ De acordo com o critério TCN a série é convergente.

Estudar as seguintes séries, aplicando o critério de D'Alembert (razão)

87-) $1\left(\frac{3}{4}\right)^1 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; Se $\begin{cases} l<1 & C \\ l>1 & D \\ l=1 & ND \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)}}{n\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^n}\cdot\frac{3}{4}}{n\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{4}n + \frac{3}{4}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(3+\cancel{\frac{3}{n}}^{0})}{4\cancel{n}} = \frac{3}{4} < 1$$

De acordo com o critério da razão, $(l<1)$ ∴ convergente

88-) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2^n} \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad \begin{matrix} l<1 & C \\ l>1 & D \\ l=1 & ND \end{matrix}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} \div \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\cancel{2^n}.2}\cdot\frac{\cancel{2^n}}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

De acordo com o critério da razão, $l<1$, a série é convergente.

89-) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{9}{10} + \frac{27}{17} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^2+1} \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad \begin{matrix} l<1 & C \\ l>1 & D \\ l=1 & ND \end{matrix}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{3^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{3^n}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{\cancel{3^n}.3}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{3(n^2+2n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(1+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0})}{\cancel{n^2}(3+\cancel{\frac{6}{n}}^{0}+\cancel{\frac{6}{n^2}}^{0})} = \frac{1}{3}$$

De acordo com o critério da razão, $l<1$, ∴ é convergente

90-) $\frac{1}{6} + \frac{2}{36} + \frac{6}{216} + \frac{24}{1296} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n}$ $\quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad$ $l<1$ C, $l>1$ D, $l=1$ ND

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{6^{(n+1)}} \div \frac{n!}{6^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{6^n}.6} \cdot \frac{\cancel{6^n}}{\cancel{n!}} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{6} = \infty$$; De acordo com o critério da razão, $l>1$, Portanto a série é divergente.

91) $1 + 2 + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ $\quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad$ $l<1$ C, $l>1$ D, $l=1$ ND

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \div \frac{n^2}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 . \cancel{n!}}{(n+1).\cancel{n!}\ n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)n^2}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^3+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1 + \frac{2}{n}^0 + \frac{1}{n^2}^0)}{n^{\cancel{3}}(1+\frac{1}{n}^0)} = 0$$

De acordo com o critério da razão, $L<0$ ∴ Convergente

92-) $1 + \frac{2}{1.3} + \frac{6}{1.3.5} + \frac{24}{1.3.5.7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\prod_{K=1}^{n} (2K-1)}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{\prod_{K=1}^{n+1} (2K-1)} : \frac{n!}{\prod_{K=1}^{n} (2K-1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{\prod_{K=1}^{n+1} (2K-1)} \cdot \frac{\prod_{K=1}^{n} (2K-1)}{n!} \right)$$

$\prod_{K=1}^{n} = 1.3.5.7\ (2n-1)$ $\qquad \prod_{k=1}^{n+1} = 1.3.5.7.9.\ (2n-1).(2(2n-1)-1)$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cancel{n!}.\cancel{1.3.5.7.9\ (2n-1)}}{\cancel{1.3.5.7.9(2n-1)}.(4n-3).\cancel{n!}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{4n-3} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+1/n^0)}{\cancel{n}(4-\frac{3}{n}^0)}$$

$l = \frac{1}{4} < 1$ ∴ Converge.

93-) $1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n!} : \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2^n}.(n-1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}.\cancel{2^n}.2^{-1}}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty}(2(n-1)) = -2 < 1 \therefore \text{ Converge}$$

94.) $7+\frac{49}{2}+\frac{343}{6}+\frac{2401}{24}+\ldots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$

$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ se $l<1$ C

$l>1$ D

$l=1$ Nada podemos concluir

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{7^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{7^n}.7.\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\cancel{7^n}}\right) = 0 < 1$$

Pelo critério do razão, a série converge

95 $\frac{1.2.3}{4}+\frac{2.3.4}{16}+\frac{3.4.5}{64}+\ldots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{4^n}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4^{n+1}} : \frac{n(n+1)(n+2)}{4^n}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}(n+3).\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}.4\ n\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{4n}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+3/\overset{0}{n})}{4\cancel{n}} = \frac{1}{4} < 1 \quad \text{Converge}$$

96. $\frac{4}{1.2.3} + \frac{16}{2.3.4} + \frac{64}{3.4.5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(n+1)(n+2)}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)} : \frac{4^n}{n(n+1)(n+2)} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{4^n}.4 \, n\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}(n+3) \, \cancel{4^n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{n+3} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}.4}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})} = 4 > 1$$

$\therefore$ Diverge.

97. $\frac{1}{2.3} + \frac{1.4}{4.2.5} + \frac{1.4.7}{8.6.7} + \frac{1.4.7.10}{16.24.9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{2^n(n!)(2n+1)}$

$$\prod_{k=1}^{n} (3k-2) = 1.4.7\dots(3n-2)$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} (3k-2) = 1.4.7\dots(3n-2).[3(n+1)-2]$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1.4.7\dots(3n-2)(3n+1)}{2^{n+1}(n+1)!(2n+3)} : \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{2^n(n!)(2n+1)} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{1.4.7}\dots\cancel{(3n-2)}(3n+1).\cancel{2^n}\cancel{(n!)}(2n+1)}{\cancel{2^n}2(n+1)\cancel{n!}(2n+3).\cancel{1.4.7}\dots\cancel{(3n-2)}} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n+2}{4n^2+10n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(6+5/n+2/n^2)}{\cancel{n^2}(4+10/n+6/n^2)} = \frac{3}{2} > 1$$

Através do critério da razão, com $l>1$. Portanto a série Diverge.

98.) $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^3} + \frac{3}{e^5} + \frac{4}{e^7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2n-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2n-1}}$ $\quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad l<1$ C

$l>1$ D

$l=1$ não podemos concluir nada

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{e^{2n+1}} \div \frac{n}{e^{2n-1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot \cancel{e^{2n}}\, e^{-1}}{\cancel{e^{2n}}\, e \cdot n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{-1} n + e^{-1}}{en} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(e^{-1} + \cancel{e^{-1}/n})}{\cancel{n} e} \right) = e^{-2} < 1$$

De acordo o critério da razão a série converge

99.) $\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n + 3n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n+3n}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{2^{n+1} + 3n + 3} \div \frac{\pi}{2^n + 3n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{\pi}(2^n + 3n)}{[(2^n \cdot 2) + (3n+3)] \cdot \cancel{\pi}} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 3n}{3n \cdot 2^n \cdot 2 + 6n + 6} \right)$$

?

100.) $1 + \frac{2}{4} + \frac{6}{27} + \frac{24}{256} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \div \frac{n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!} \cdot n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1} < 1$$

De acordo com o critério da razão, $l<1$, a serie é convergente

101- $\frac{1.3}{3} + \frac{3.5}{9} + \frac{5.7}{27} + \frac{7.9}{81} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{3^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{3^n}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n+1)(2n+3)}{3^{n+1}} \div \frac{(2n-1)(2n+1)}{3^n} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{(2n+1)}(2n+3) . \cancel{3^n}}{\cancel{3^n} . 3(2n-1)\cancel{(2n+1)}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+3}{6n-3} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(2+\overset{0}{3/n})}{\cancel{n}(6-\underset{0}{3/n})} = \frac{1}{3}$$

De acordo o critério da razão, como $l<1$, então a série converge.

102 $\frac{3}{2} + \frac{9}{2.3} + \frac{27}{3.4} + \frac{81}{4.5} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3^{(n+1)}}{(n+1)(n+2)} : \frac{3^n}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{3^n}.3.n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)\cancel{3^n}} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{n}(3)}{\cancel{n}(1+\underset{0}{2/n})} \right) = 3 > 1$$

De acordo com o critério da razão $l>1$ ∴ Diverge.

103 - $1e^{-1} + 2e^{-2} + 3e^{-3} + 4e^{-4} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-(n)}$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)\, e^{-(n+1)}}{n.e^{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)\cancel{e^{-n}}.e^{-1}}{n\cancel{e^{-n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(e^{-1}+e^{-1}/n)}{\cancel{n}} = e^{-1}$$

De acordo o critério da razão, $l<1$ ∴ Converge.

104 - $\frac{2^1}{1^1} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{4^4} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^{(n+1)}} \div \frac{2^n}{n^n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{2^n}.2.n^n}{(n+1)^n(n+1)^1.\cancel{2^n}} \right)$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n+1} . \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 0.e^{-1} = 0 < 1$$

De acordo com o critério da razão Converge.

105-) $\frac{3^1}{1^1}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{3^4}{4^4}+\dots \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{(n+1)}}{(n+1)^{(n+1)}}\div\frac{3^n}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{3^n}\cdot 3\cdot n^n}{(n+1)^n(n+1)\,\cancel{3^n}}\right)$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=0\cdot e^{-1}=0<1 \quad \therefore \text{converge.}$$

106-) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{3!}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{4!}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.2.3.5.7\dots(2n-1)}{2.4.6.8\dots 2n\cdot n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{n=1}^{n}(2n-1)}{\prod_{n=1}^{n}2n}\cdot\frac{1}{n!} \qquad \prod_{n=1}^{n}(2n-1)=1.2.3.5.7\dots(2n-1)$$

$$\prod_{n=1}^{n}2n=2.4.6.8\dots(2n)$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{1.2.3.5.7\dots(2n-1)}(2n+1)}{\cancel{2.4.6.8\dots(2n)}(2n+2)(n+1)!}\cdot 1\right)\div\left(\frac{\cancel{1.2.3.5.7\dots(2n-1)}}{\cancel{2.4.6.8\dots(2n)}}\cdot\frac{1}{n!}\right)$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)\cdot\cancel{n!}}{(2n+2)(n+1)\cancel{n!}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(2+1/n)}{n^2(2+4/n+2/n^2)}\right)=0<1$$

$\therefore$ Converge.

107-) $\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot\frac{2^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\cdot\cancel{2^n}}\right)=0<1$$

$\therefore$ Converge.

108-) $\frac{2^1\cdot 1!}{1^1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\frac{2^4\cdot 4!}{4^4}+\dots\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{(n+1)}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\div\frac{2^n\cdot n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2^n}\cdot 2\,\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}}\right)$$

$$l=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e}<1 \quad \therefore \text{Converge.}$$

109-) $\frac{3^1.1!}{1^1} + \frac{3^2.2!}{2^2} + \frac{3^3.3!}{3^3} + \frac{3^4.4!}{4^4} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{(n+1)}.(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \div \frac{3^n.n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{3^n}.3.\cancel{(n+1)}\cancel{n!}.n^n}{(n+1)^n.\cancel{(n+1)}.\cancel{3^n}.\cancel{n!}}\right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} 3.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1 \therefore \text{Diverge}$$

110-) $\frac{1^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} \div \frac{n^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n\cancel{(n+1)}.\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}.n^n}\right) = e > 1$$

$\therefore$ Diverge

111-) $\frac{1}{2^2\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3^3\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{4^4\sqrt{\ln 4}} + \frac{1}{5^5\sqrt{\ln 5}} + \dots \sum_{n=2} \frac{1}{n^n\sqrt{\ln n}}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\sqrt{\ln n}}{(n+1)^{(n+1)}\sqrt{\ln(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\cancel{\sqrt{\ln n}}}{(n+1)^n(n+1)\cancel{\sqrt{\ln n}}.\sqrt{\ln 1}} = 0$$

$\therefore$ Converge.

112-) $\frac{1}{\sqrt{2^1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^4}} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{(n+1)}}} \div \frac{1}{\sqrt{2^n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n}.\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \therefore \text{Converge}$$

113-) $\frac{1}{e^1} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^4} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{(n+1)}} \div \frac{1}{e^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}.e}\right) = e^{-1} < 1$$

$\therefore$ Converge

114-) $\frac{1}{e^1} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)}{e^{(n+1)}} : \frac{n}{e^n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot \cancel{e^n}}{\cancel{e^n} \cdot e \cdot n} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(1 + 1/n)}{\cancel{n} e} \Big) = e^{-1} < 0$

$\therefore$ Converge

115-) $1\left(\frac{3}{5}\right)^1 + 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$l = \lim_{n \to \infty} \left((n+1) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{(n+1)} : n\left(\frac{3}{5}\right)^n \right)$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot \cancel{(3/5)^n} (3/5)}{n \cancel{(3/5)^n}} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}(3/5 + (3/5)/n)}{\cancel{n}} = \frac{3}{5} < 0$

$\therefore$ Converge.

116. $\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

Através do critério da razão temos:

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)} : \frac{2^n}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot n}{(n+1) \cancel{2^n}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{n} \cdot 2}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} \right) = 2 > 1$

$\therefore$ Diverge

Através do critério de Raabe.

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)} : \frac{2^n}{n} - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot n}{(n+1) \cdot \cancel{2^n}} - 1 \right)$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n - n - 1}{(n+1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{n}(1 - 1/n)}{\cancel{n}(1 + 1/n)} \right) = 1$

Não podemos concluir pelo critério de Raabe.

117.) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\dots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{2^{(n+1)}}\div\frac{n}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)2^{\cancel{n}}}{\cancel{2^n}.2.n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\cancel{1/n}^{0})}{\cancel{n}.2}$$

$l=\frac{1}{2}<1$ ∴ Converge, através do critério da razão

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-n-1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}(1-\cancel{1/n}^{0})}{\cancel{n}(1+\cancel{1/n}^{0})}\right)=1$$

118.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{(n+1)}.[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\div\frac{4^n.(n!)^2}{(2n)!}\right)$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{4^n}.4\,(n+1).\cancel{n!}(n+1)\cancel{n!}.\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\cancel{4^n}.\cancel{(n!)}\cancel{(n!)}}\right)$$

$l=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n+2}{4n^2+6n+2}=1$ (Nada podemos concluir pelo critério da razão)

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{4n^2}+6n+\cancel{2}-\cancel{4n^2}.8n-\cancel{2}}{4n^2+8n+2}=\frac{-2n}{n^2(4+\cancel{8/n}+\cancel{2/n^2})}=0<1$$

∴ Diverge

119-1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3.6.9\ldots(3n)}\right]^2$

$\prod_{n=1}^{n+1} 1.4.7\ldots(3n-2).(3n+1) \quad \prod_{n=1}^{n+1} 3.6.9\ldots(3n)(3n+3)$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1.4.7\ldots(3n-2)(3n+1)}{3.6.9\ldots(3n)(3n+3)}\right)^2 \div \left(\frac{1.4.7.(3n-2)}{3.6.9\ldots(3n)}\right)^2$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{[\cancel{1.4.7\ldots(3n-2)}(3n+1).\cancel{1.4.7.(3n-2)}(3n+1).\cancel{3.6.9.(3n)}.\cancel{3.6.9.(3n)})}{\cancel{3.6.9\ldots(3n)}(3n+3).\cancel{3.6.9.(3n)}(3n+3).\cancel{1.4.7\ldots(3n-2)}.\cancel{1.4.7.(3n-2)}}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2}{(3n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+6n+1}{9n^2+18n+9}=1$$

(Nada podimos concluir pelo critério da razão)

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{9n^2}+18n+9-\cancel{9n^2}-6n-1}{9n^2+18n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n+8}{9n^2+18n+9}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{n(12+\cancel{8/n}^{0})}{n^2(9+\cancel{18/n}+\cancel{9/n^2})}=0<1$$

$\therefore$ Diverge pelo critério de Raabe

120 $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{2}{2}}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{9}{13}\right)^{\frac{4}{2}}+\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}}$$

$$l=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}<1$$

$\therefore$ De acordo com o critério da raiz enésima converge

121.) $\left(\frac{2}{1}\right)^1 + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \dots =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \qquad l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ Converge

122) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2^2} + \left(\frac{2}{4}\right)^{3^2} + \left(\frac{3}{5}\right)^{4^2} + \left(\frac{4}{6}\right)^{5^2} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n.n}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = 1$$

123) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{7}\right)^5 + \left(\frac{3}{10}\right)^7 + \left(\frac{4}{13}\right)^{10} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(3+1/n^0)}\right)^{\frac{\cancel{n}(2+1/n^0)}{\cancel{n}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$l = \frac{1}{9} < 1 \quad \therefore$ Converge

124) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{3}{3}} + \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{4}{3}} + \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}(2+1/n)}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$$

$\therefore$ Converge.

125.) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{10} + \frac{4}{\sqrt{17}} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Para determinar o critério da integral imprópria:

1°) transformar an em $f(n)$

2°) Verificar $f'(n) < 0$

3°) Resolver a integral imprópria $l = \lim_{n \to \infty} \int_b^{\infty} f(n)\, dn$

1°) $f(n) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad f(n) = n \cdot (n^2+1)^{-1/2}$

2°)
$$f'(n) = (n^2+1)^{-1/2} + x \cdot \frac{-1}{2} \cdot (n^2+1)^{-3/2} \cdot 2n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(n^2+1)^3}} \quad \text{ou}$$

$$f'(n) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2}(n^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2n}{n^2+1}$$

$$= \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \right) \div (n^2+1) = \frac{1}{(n^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$$

3°)
$$l = \lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$x^2+1 = t$
$2x\, dx = dt$
$x\, dx = \frac{1}{2} dt$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \sim \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \sim \frac{1}{2} \int_1^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$\sim \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} = t^{1/2} = (x^2+1)^{1/2} \Big|_1^{\infty} =$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \infty - \sqrt{2} = \infty \quad \therefore \text{ Diverge}$$

126.-) $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} + \dots \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

$f(n) = (2n+1)^{-3}$

$f'(n) = -3(2n+1)^{-4} \cdot 2 = \frac{-6}{(2n+1)^4} < 0$

$l = \lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} (2n+1)^{-3}\, dn$

$2n+1 = t \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^{-2}}{-2} \right) = -\frac{1}{4(2n+1)}\Big|_1^{\infty}$

$2dn = dt$

$dn = \frac{1}{2} dt \qquad l = \lim_{n \to \infty} \left(-\cancelto{0}{\frac{1}{4.(2.\infty+1)}} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{12}$

$\therefore$ A série converge

127.-) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

1º) $f(n) = \frac{n}{n^2+1}$

2º) $f'(n) = \frac{(n^2+1) - n.2n}{(n^2+1)^2} = \frac{-n^2+1}{(n^2+1)^2} < 0 \; ; \forall n > 1$

3º) $l = \lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\, dn$

$n^2+1 = t \qquad \int_1^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\, dn \sim \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln(n^2+1) \Big|_1^{\infty}$

$2ndn = dt$

$ndn = \frac{1}{2} dt$

$l = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \left(\infty^2 + 1 - 1 - 1 \right) = \infty$

$\therefore$ Diverge

128.) $\frac{2}{3^3}+\frac{3}{8^3}+\frac{4}{15^3}+\frac{5}{24^3}+\cdots \quad \sum_{n=2} \frac{n}{(n^2-1)^3}$

1°) $f(n)=\frac{n}{(n^2-1)^3}$

2°) $f'(n)=\frac{(n^2-1)^3-n.3(n^2-1).2n}{(n^2-1)^6}$

$=\frac{(n^2-1)^3-6n^2(n^2-1)}{(n^2-1)^6} < 0$

3°) $l=\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)^3}\,dn$

$n^2-1=t$ $\quad \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^3}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}t^{-3}\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)$

$2n\,dn=dt$

$n\,dn=\frac{1}{2}dt$ $\quad =-\frac{1}{4t^2}\Big|_1^{\infty}$

$l=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $\quad \therefore$ Converge

129.) $\frac{1}{10}+\frac{8}{25}+\frac{27}{90}+\frac{64}{265}+\cdots \quad \sum_{n=1}\frac{n^3}{n^4+9}$

1°) $f(n)=\frac{n^3}{n^4+9}$

2°) $f'(n)=\frac{3n^2(n^4+9)-n^3.4n^3}{(n^4+9)^2}=\frac{3n^6+27n^2-4n^6}{(n^4+9)^2}<0$

3°) $l=\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{n^3}{n^4+9}\,dn$

$n^4+9=t$ $\quad \sim\int_1^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{4}\ln(n^4+9)$

$4n^3dn=dt$

$n^3dn=\frac{1}{4}dt$ $\quad l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln(\infty^4+9)-\frac{1}{4}\ln(1^4+9)\right)=\infty$

$\therefore$ Diverge

130 $\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \dots \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \operatorname{arctg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$

$tg^2 x + 1 = \sec^2 x$

$f(x) = (x^2-4)^{-1/2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2-4)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2-4)^{3/2}} < 0$

$l = \lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx \qquad x = 2\sec\theta$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx \sim \int \frac{1}{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}} dx \sim \int \frac{1}{\sqrt{4(\sec^2\theta - 1)}} dx$

$\sim \int \frac{1}{2 tg\theta} d\theta \sim \frac{1}{2} \int \cot g\theta \, d\theta$ – Qual a Integral?

131 $\frac{3}{5^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{3}{11^2} + \frac{3}{14^2} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n+2)^2}$

$(5, 8, 11, 14 \dots)$

$b_n = 5 + (n-1) \cdot 3$

$b_n = 3n + 2$

$f(x) = 3(3x+2)^{-2}$

$f'(x) = -6(3x+2)^{-3} \cdot 3 = \frac{-2}{(3x+2)^3} < 0$

$l = \lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{3}{(3x+2)^2} dx$

$3x + 2 = t$

$3dx = dt$

$\int_1^{\infty} \frac{3}{(3x+2)^2} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \sim \int t^{-2} dt = \frac{t^{-3}}{-3}$

$\sim \left. \frac{-1}{(3x+2)} \right|_1^{\infty}$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(0 + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \therefore$ converge

132-) $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{\cancel{\ln} 3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \dots \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$

$l = \lim_{n \to \infty} \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx \qquad \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$

$\ln x = t$

$\frac{1}{x} dx = dt \qquad l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(\ln \infty)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} \right) = \frac{-(\ln 2)^2}{4}$

$\therefore$ converge

133-) $\frac{1}{2} + \frac{2}{17} + \frac{3}{82} + \frac{4}{257} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

$f(x) = \frac{x}{x^4+1} \qquad f'(x) = \frac{(x^4+1) - x \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2}$

$= \frac{x^4 + 1 - 4x^4}{(x^4+1)^2} < 0$

$l = \lim_{n \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+1} dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+1} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 \cdot x^2 + 1} dx$

$x^2 = t$

$2x dx = dt \qquad \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^2$

$x dx = \frac{1}{2} dt$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \infty - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{-1}{4} \operatorname{arctg}$

$\therefore$ converge

134-) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{20}+\dots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+x)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-4x^2+4x+2}{(x^2+x)^2}=\frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+x)^2}<0$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}dx \qquad \int\frac{2x}{x^2+x}dx+\int x^{-2}dx+\int x^{-1}dx$$

$$2\int\frac{x}{x^2+x}dx \sim 2\int\frac{1}{x+1}dx=2\ln(x+1)$$

$$I=2\ln(x+1)-\frac{1}{x}+\ln x$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(2\ln(\overset{\infty}{\cancel{\infty+1}})-\frac{1}{\infty}+\ln\infty-2.\ln 2-1\right)=\infty \quad \therefore \text{Diverge}$$

135-) $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{9}{28}+\frac{16}{65}+\dots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$

$$f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^3+1)-x^2.3x^2}{(x^3+1)^2}<0$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{x^2}{x^3+1}dx \qquad \frac{1}{3}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{3}\ln t=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)$$

$x^3+1=t$

$3x^2dx=dt$

$x^2dx=\frac{1}{3}dt$

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\ln(\infty^3+1)-\frac{1}{3}\ln(1^3+1)\right)=\infty$$

$\therefore$ Diverge

136-) $\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{1}\right)+\frac{1}{2^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\ldots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$f(x)=\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$

$f'(x)=-2x^{-3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)+x^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\pi x^{-2}<0$

$l=\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx$ ..... (Preguiça)

137-) $\frac{1}{0,5}+\frac{1}{1,5}+\frac{1}{2,5}+\frac{1}{3,5}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-0,5}$

- Critério por comparação por limites

$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ $\begin{cases} 0<l<\infty, & \text{as duas tem o mesmo critério} \\ l=0 \text{ e } b_n=C, & \text{então } a_n=C \\ l=\infty \text{ e } b_n=D, & \text{então } a_n=D \end{cases}$

$\Sigma b_n=\Sigma\frac{1}{n}$ (série p, como $p\leq 1$ D)

$l=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-0,5}\div\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1-\cancel{\frac{0,5}{n}}\right)}=1$

Como $0<l<\infty$ $\therefore$ Diverge

138-) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2e}+\frac{1}{3e^2}+\frac{1}{4e^3}+\ldots\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ne^{n-1}}$

$\Sigma b_n:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ Através do critério da razão

$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{n+1}}:\frac{1}{e^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}e}\right)<1$ $\therefore$ Converge

$l=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{ne^{n-1}}:\frac{1}{e^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{e^n}}{n\cdot\cancel{e^n}e^{-1}}\right)=0$

$\therefore$ Como $l=0$ e Σb_n converge, então a série converge

139-) $\frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{17^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10+(2n-1))^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+9)^2}$

$\sum bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p, com $p>1$ ∴ converge)

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{4n^2+36n+81} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{\cancel{n^2}(4+36/n^0+81/n^2)} \right) = \frac{1}{4}$

Como $0<l<1$ ∴ A série é convergente

140-) $\frac{1}{\ln 2^2} + \frac{1}{\ln 3^2} + \frac{1}{\ln 4^2} + \frac{1}{\ln 5^2} + \dots \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^2}$

$\sum bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p, com $p>2$, converge)

?

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln n^2} \div \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{\ln n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(2n \div \frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} \right) = \infty$

141-) $3 + \frac{4}{8} + \frac{5}{27} + \frac{6}{64} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3}$

$\sum bn = \frac{n}{n^3}$ ∴ $\sum bn = \sum \frac{1}{n^2}$ (série p, com $p>1$ ∴ converge)

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n^3} \div \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n^3} \cdot \frac{n^2}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+2/n)}{\cancel{n}} = 1$

∴ Converge

142-) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$

$\sum bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p, com $p\leq 1$ ∴ Diverge)

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4n} \div \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4}$ ∴ Diverge

143-) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

$\sum bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p, com $p>1$ ∴ converge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \div \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+1/n^2)}\right) = 1$$

$\therefore$ A série converge

144-) $\frac{0,1}{1} + \frac{0,1^2}{2^1} + \frac{0,1^3}{2^2} + \frac{0,1^4}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,1^n}{2^{n-1}}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{0,1^n} \cdot 0,1 \cdot \cancel{2^n} \cdot 2^{-1}}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{0,1^n}}\right) = 0,05 < 1 \quad \therefore \text{converge}$$

145-) $\frac{1}{1.3^0} + \frac{1}{2.3^1} + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{4.3^3} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^{n-1}}$

$\sum bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (série geométrica; $q>1$ $\therefore$ Diverge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n3^{n-1}} : \frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{n.3^n.3^{-1}}\right) = \infty$$

$\therefore$ A série Diverge

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)3^n} \div \frac{1}{n.3^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n.\cancel{3^n}.3^{-1}}{(n+1).\cancel{3^n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}.3^{-1}}{\cancel{n}(1+1/n)}\right) = \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore$ converge através do critério da razão

146-) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

$\sum bn = \frac{1}{n}$ $\therefore$ Diverge

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n+1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right) = \frac{1}{3} \quad \therefore \text{Diverge}$$

147-) $\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$

$\sum bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p, como $p>1$ $\therefore$ converge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+n} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+1/n)}\right) = 1$$

$\therefore$ Converge

148-) $\frac{1}{10.11.12} + \frac{1}{11.12.13} + \frac{1}{12.13.14} + \cdots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)(n+11)}$

$\Sigma bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (série p, com p>1 ∴ Converge

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+9)(n+10)(n+11)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n^2+19n+90)(n+11)}$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+19n^2+9n+11n^2+201n+990} = 1$ ∴ Converge

149-) $\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{5}} + \cdots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$\Sigma bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p) ∴ Diverge

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \div \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n)}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+1/n}}\right) = 1$

∴ Diverge.

150-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3\sqrt{n}}{n}$ $\qquad n^{1/2} \div n = n^{-1/2}$

$\Sigma bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ (série p, com p<1 ∴ Diverge)

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3\sqrt{n}}{n} \div \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+3n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(n^{-1/2}+3)}{\cancel{n}}\right) = \infty$

∴ Diverge

151-) $\frac{5}{6} + \frac{9}{27} + \frac{13}{62} + \frac{17}{111} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{7n^2-1}$

$\Sigma bn = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p, com p≤1 ∴ Diverge)

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{7n^2-1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+n}{7n^2-1}\right) = \frac{4}{7}$ ∴ Diverge

Critério de comparação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$$

$\sum bn = \sum \frac{1}{5^n}$ (série geométrica $\therefore$ converge)

$2+5^n > 5n$ Como $an < bn$ e bn converge

$\frac{1}{2+5^n} < \frac{1}{5^n}$ $\therefore$ converge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$$

$\sum bn = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ (série p, com $p < 1$ $\therefore$ Diverge)

$\sqrt{n}-1 < \sqrt{n}$

Como $an > bn$ $\therefore$ Diverge

$\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$$

$\sum bn = \sum \frac{n}{n^4} = \sum \frac{1}{n^3}$ (série p, com $p>3$ $\therefore$ converge)

$\ln n < n$

$\frac{\ln n}{n^4} < \frac{n}{n^4}$ $\therefore$ Como $an < bn$ $\therefore$ converge

---

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$\sum bn = \frac{1}{n}$ (série p, com $p \leq 1$ $\therefore$ Diverge)

$\ln n < n$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ Como $an > bn$ $\therefore$ Diverge

164-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p; p>1; converge)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\quad f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$

$|f'(x)| < 0$

$\left| \frac{2}{x^{-3}} \right| < 0$ $\therefore$ Absolutamente convergente

165-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p, com $p \leq 1$ $\therefore$ Diverge)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\quad f(x) = x^{-1}$ $\quad |f'(x)| < 0$

$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ $\quad \left| -\frac{1}{x^2} \right| < 0$

$\therefore$ Condicionalmente convergente

166-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

Pelo TCN, temos

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$ $\therefore$ Diverge

$f(x) = \frac{x}{x+1}$

$f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ $\quad \therefore$ Diverge

167-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$

Pelo critério da razão temos:

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} \div \frac{1}{(2n-1)!} \right) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(2n-1)!}}{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}} \right| = 0 \therefore$ Converge

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0 \therefore$ Converge

169-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (Série geométrica ; converge)

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$f(n) = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} \quad f'(n) = 2^{-x} \ln 2 = \frac{\ln 2}{2^x} < 0$

$\therefore$ Condicionalmente convergente

170-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$

$\therefore$ Converge

174) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2n+3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$ Pelo TCN, temos:

$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \therefore$ Diverge

$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \quad \therefore$ Diverge

- Exemplo 54:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ (série p, com p>1 ∴ converge)

∴ Série absolutamente convergente

- Exemplo 55:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ (série p, com p≤1 ∴ Diverge)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad f(n) = x^{-1} \qquad f'(n) = -x^{-2} \qquad \therefore \left|-\frac{1}{x^2}\right| < 0$$

∴ é condicionalmente convergente.

- Exemplo 57:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

Pelo tcN: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$ ∴ Diverge

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ∴ Diverge

175-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (série p; p>1 ∴ Converge)

∴ Absolutamente convergente

176-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ (série p; p<1 ∴ Diverge)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0 \qquad f(x) = x^{-2/3} \qquad f'(n) = \frac{-2}{3} \cdot x^{-5/3}$ ∴ Condicionalmente Convergente

177-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Pelo critério da Razão:

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \div \frac{n!\,n!}{(2n)!} \right)$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}\,\cancel{n!}\,(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{4n^2+4n+2} \right) = \frac{1}{4} < 1$

$\therefore$ Absolutamente convergente

178-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot n!$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot n!$

Pelo critério da Razão:

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1)! \div \frac{2^n}{n^n} \cdot n! \right)$

$l = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{2^n} \cdot 2\,\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!} \cdot n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)^1}\,\cancel{2^n}\,\cancel{n!}} \right) = \lim_{n \to \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 0$

$\therefore$ Absolutamente Convergente

179-) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-5n}{3n+1} \right)^n$

$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left| \left(\frac{1-5n}{3n+1} \right)^n \right| \right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-5n}{3n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{-5}{3} \right| = \frac{5}{3} > 1$

$\therefore$ Diverge

100) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+3}{n^2-3}\right)^n$

$$\sum |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{n+3}{n^2-3}\right|^n$$

Pelo critério da raiz enésima

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+3}{n^2-3}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 < 1$$

$\therefore$ Absolutamente Convergente

101-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n n!}{2^n . n^n}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n . n!}{2^n . n^n}$ Pelo critério da razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^{n+1} . (n+1)!}{2^{(n+1)} (n+1)^{(n+1)}} \div \frac{5^n . n!}{2^n . n^n} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{5^n} . 5 \cancel{(n+1)} \cancel{n!} \cancel{2^n} . n^n}{\cancel{2^n} . 2 . (n+1)^n \cancel{(n+1)} . \cancel{5^n} \cancel{n!}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{5}{2e} < 1$$

$\therefore$ Absolutamente Convergente.

102-) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n^2-3}{n+2}\right)^{n/2}$

$$\sum |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-3}{n+2}\right)^{n/2}$$

Pelo critério da raiz enésima

$$l = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n^2-3}{n+2} \right)^{n/2} \right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3}{n+2} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{\frac{1}{2}} = \infty > 1$$

$\therefore$ Diverge

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3}{n+2}\right)^{n/2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{1}\right)^{n/2} = \infty$$ $\therefore$ Diverge

182-) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n^2-3}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\therefore$ Diverge

183-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{10n+2}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{10n+2}$ Pelo TCN, temos:

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{10n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{10}$ $\therefore$ Diverge

184-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$?

185-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

Pelo critério da comparação por limites:

$\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (série p, $p>1$ $\therefore$ converge)

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) = 1$ $\therefore$ Absolutamente convergente.

186-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2^{k-1}}$ Pelo Critério da Razão, temos:

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2^{k-1}}$ $l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{2^{n-1} \cdot 2^n} : \frac{2n-1}{2^{n-1}}\right)$

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n-1)(2n+1) \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{2^{-1}}}{2^n \cdot \cancel{2^{-1}} \cdot \cancel{2^n} \cdot (2n-1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-1}{2^n \cdot (2n-1)}\right)$

?

187-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{e^n}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

Pelo critério da razão, temos:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} : \frac{n^2}{e^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{e^n}}{\cancel{e^n} \cdot e \cdot n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{e n^2} \right)$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1 + \overbrace{2/n}^{0} + \overbrace{1/n^2}^{0})}{\cancel{n^2} \cdot e} = \frac{1}{e} < 1 \quad \therefore \text{ Absolutamente convergente}$$

188-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^2+4}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+4}$

Pelo TCN

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1 \quad \therefore \text{ Diverge}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+4} \qquad f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)} < 0$$

$\therefore$ Condicionalmente convergente

189-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$

Pelo critério da comparação por limites

$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ $\qquad \sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (série p, $p \leq 1$ $\therefore$ Diverge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+4/n^2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{(1+\underbrace{4/n^2}_{0})}} = 1$$

$\therefore$ Diverge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} = 0$$

$$f(x) = (x^2+4)^{-1/2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+4)^{-3/2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = -x/(x^2+4)^{3/2} < 0$$

$\therefore$ Condicionalmente convergente

190-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2^n}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Pelo critério da razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1).\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}.2.n} \right) = \frac{1}{2} < 1 \therefore \text{Converge}$$

$\therefore$ Absolutamente Convergente.

191-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4^n}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$

Pelo critério da razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}.4.n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{4n} \right) = \frac{1}{4} < 1$$

$\therefore$ Absolutamente Convergente.

192-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+1}$

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ Pelo TCN, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \therefore \text{Diverge}$$

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \quad f'(x) = \frac{2x+1-x.2}{(2x+1)2} = \frac{1}{(2x+1)^2} \therefore f'(x) < 0$$

$\therefore$ Divergente.

193-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Pelo critério da comparação por limites:

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ (série p, $p \leq 1 \therefore$ Diverge)

$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+1/n}} \right) = 1$$

$\therefore$ A série Diverge

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+1/n^2}} = 0$$

$$f(x) = (x^2+x)^{-1/2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+x)^{-3/2} \cdot (2x+1) = \frac{-(2x+1)}{2\sqrt{(x^2+x)^3}} < 0$$

$\therefore$ Condicionalmente Convergente.

194-) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)!}$

$$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (2k-1)!}$$

Pelo critério da razão, temos:

(PULEI)

195) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^6}{e^n}$

Pelo critério da razão temos:

$$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{e^n}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^6}{e^{n+1}} : \frac{n^6}{e^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^6 \cdot e^n}{e^n \cdot e \cdot n^6} \right) = \frac{1}{e} < 0 \therefore \text{Converge}$$

$\therefore$ Absolutamente Convergente.

196) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+2)^2}$

Pela comparação de limites, temos:

$$\sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ $\therefore$ (série p, p>1 $\therefore$ Converge)

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+2)^2} = 1$ $\therefore$ A série é Absolutamente Convergente.

209.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot x^n$

$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, Para ser convergente

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1) \cdot x^{(n+1)}}{2^{n+1}} : \frac{n \cdot x^n}{2^n} \right| < 1$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1) \cdot \cancel{x^n} \cdot x \cdot 2^n}{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot n \cdot x^n} \right| < 1 \qquad \left|\frac{x}{2}\right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| < 1$

$\left| \frac{x}{2} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}} \right| < 1 \quad \therefore \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \quad \therefore \quad |x| < 2$

$-2 < x < 2$, para ser convergente

210) $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) x^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1) \cdot x^n}{(2n-1) x^{n-1}} \right| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1) \cdot \cancel{x^n}}{(2n-1) \cancel{x^n} \cdot x^{-1}} \right| < 1$

$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{2n-1} \right| < 1 \qquad |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n}(2+1/n)}{\cancel{n}(2-1/n)} \right| < 1$

$|x| < 1 \quad \therefore \quad -1 < x < 1$

211) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| < 1$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cancel{n!} \cancel{x^n}} \right| < 1 \qquad |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| < 1 \quad \therefore x \in \mathbb{R}$

0

212-) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n}}{n!\, x^{n-1}}\right|<1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{x^{n}}}{\cancel{n!}\,\cancel{x^{n}}\, x^{-1}}\right|<1$

$|x|\lim_{n\to\infty}|n+1|<1 \qquad x=0$

213-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n}}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} : \frac{(x+1)^{n}}{\sqrt{n}}\right|<1$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(x+1)^{n}}(x+1)\,\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\,\cancel{(x+1)^{n}}}\right|<1 \rightarrow |x+1|\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right|<1$

$|x+1|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n(1+1/n)}}<1 \quad \therefore \quad |x+1|<1$

$-1<x+1<1$
$-2<x<0$

214-) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{n-1}}{2^{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)\, x^{n}}{2^{n}} : \frac{(2n+1)x^{n-1}}{2^{n-1}}\right|<1$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(2n+1)}\cancel{x^{n}}\cdot\cancel{2^{n}}\cdot 2^{-1}}{\cancel{2^{n}}\cdot\cancel{(2n+1)}\cdot\cancel{x^{n}}\cdot x^{-1}}\right|<1 \qquad \left|\frac{x}{2}\right|<1 \quad \therefore \quad |x|<2$

$-2<x<2$

215-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} : \frac{(x-2)^n}{n} \right| < 1$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-2)^n}(x-2).\ n}{(n+1).\ \cancel{(x-2)^n}} \right| < 1 \quad |x-2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| < 1$

$|x-2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+1/n)} \right| < 1 \quad \therefore \quad |x-2| < 1 \quad -1 < x-2 < 1$

$\therefore$ R: $\underline{1 < x < 3}$

216-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n (2n-1)^2}$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^n}{3^{n+1}(2n+1)^2} : \frac{x^{n-1}}{3^n (2n-1)^2} \right| < 1$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^n}\ \cancel{3^n}\ \cancel{(2n-1)^2}}{\cancel{3^n}.3\ \cancel{(2n+1)^2}.\ \cancel{x^n}.\ x^{-1}} \right| < 1 \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \quad |x| < 3$

$\underline{-3 < x < 3}$

217-) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n n!$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)^{n+1}.\ (n+1)!}{(x-1)^n.\ n!} < 1 \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-1)^n}.\ (x-1).\ (n+1)\ \cancel{n!}}{\cancel{(x-1)^n}.\ \cancel{n!}} \right| < 1$

$|x-1| \lim_{n\to\infty} |n+1| < 1 \qquad x-1 = 0$

$\infty \qquad \underline{x = 1}$

218-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n.n!}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \div \frac{(x-1)^n}{n.n!} \right| < 1$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-1)^n}.(x-1).n.\cancel{n!}}{(n+1)(n+1)\cancel{n!}.\cancel{(x-1)^n}} \right| < 1$$

$$|x-1| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n^2+2n+1} \right| < 1$$

$$|x-1| \lim_{n\to\infty} \left| \overset{0}{\cancel{\frac{\cancel{n}}{n^2(1+2/n+1/n)}}} \right| < 1 \quad \therefore \quad \underline{x \in \mathbb{R}}$$

219-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} . x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \div \frac{(-1)^n . x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n.(-1).\cancel{x^{2n}}.x^2.\cancel{2^{2n}}.\cancel{(n!)^2}}{\cancel{2^{2n}}.2\,(n+1)(n+1)\cancel{n!n!}.(-1)^n.\cancel{x^{2n}}} \right| < 1$$

$$\left|\frac{x^2}{2}\right| \lim_{n\to\infty} \left| \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n^2+2n+2}}} \right| < 1 \quad \therefore \quad \underline{x \in \mathbb{R}}$$

220-) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{2n+1} \right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+2)^{n+1}}{(2n+3)^{n+1}} \div \frac{(x+2)^n}{(2n+1)^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x+2)^n}(x+2).(2n+1)^n}{(2n+3)^n.(2n+3).\cancel{(x+2)^n}} \right| < 1$$

$$|x+2| \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{\frac{1}{2n+3} . \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n}_{0} \right| < 1$$

$\therefore \quad x \in \mathbb{R}$

221-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{n+1} : \frac{x^{2n+1}}{n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^{2n}} x^{\cancel{3}\,2} . n}{(n+1) . \cancel{x^{2n}} . \cancel{x}} \right| < 1$$

$$|x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| < 1 \quad \sim \quad |x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\underbrace{1/n}_{0})} \right| < 1$$

$$|x^2| < 1 \qquad \underline{-1 < x < 1} \quad ?$$

222-) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-2)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 (x-2)^{n+1}}{n^2 (x-2)^n} \right| < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 \cancel{(x-2)^n} (x-2)}{n^2 \cancel{(x-2)^n}} \right| < 1$$

$$|x-2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{n^2} \right| < 1$$

$$|x-2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n^2}(1+\overset{0}{2/n}+\overset{0}{1/n^2})}{\cancel{n^2}} \right| < 1 \qquad |x-2| < 1$$

$$-1 < x-2 < 1 \quad \sim \quad \underline{1 < x < 3}$$

Para $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-1)^n$ (série alternada)

$$\lim_{n\to\infty} |n^2 (-1)^n| = \infty \quad \therefore \quad \text{Diverge}$$

Para $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n^{-2}} \quad \therefore \text{Diverge}$$

$\underline{]1, 3[}$

223-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \div \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n}\, x^{\cancel{3}\,2} \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot \cancel{x^{2n}} \cdot \cancel{x}} \right| < 1$$

$$|x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+1}{2n+3} \right| < 1 \qquad -1 < x < 1$$

224-) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^{2n}} \cdot x^2 \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\, \cancel{x^{2n}}} \right| < 1 \qquad |x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\cancel{4n^2+6n+2}} \right|^{0} < 1$$

$\therefore$ $\underline{x \in \mathbb{R}}$

225-) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{(n+1)^2} \cdot x^{(n+1)^2}}{3^{n^2} \cdot x^{n^2}} \right| < 1$$

?

226-) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1} (x+3)^{n+1}}{n^n (x+3)^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^n (n+1) \cancel{(x+3)^n} (x+3)}{n^n \cdot \cancel{(x+3)^n}} \right| < 1$$

$$|x+3| \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n\, e} \cdot \overbrace{(n+1)}^{\infty} \right| < 1$$

$$|x+3| = 0 \qquad \underline{x = -3}$$

Séries de Taylor e de Mac-Laurin

$$f(x) = \frac{f(x_0)(x-x_0)^0}{0!} + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Obs.: Na série de Mac-Laurin $x_0 = 0$

Exemplo 64: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ em série de Mac-Laurin

$f(x) = (1+x)^{-1} \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -(1+x)^{-2} \rightarrow f'(0) = -1$

$f''(x) = +2(1+x)^{-3} \rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} \quad f'''(0) = -6$

$f^{IV}(x) = 24(1+x)^{-5} \quad f^{IV}(0) = 24$

$$f(x) = x^0 - x^1 + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{6}x^3}{\cancel{6}} + \frac{\cancel{24}x^4}{\cancel{24}} + \dots$$

Termo final

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| < 1 \sim \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x}{\cancel{x^n}} \right| < 1 \sim |x| < 1$$

$-1 < x < 1$

Exemplo: $f(x) = e^x$ para $x_0 = 1$

$f(x) = e^x \quad f(1) = e$

$f'(x) = e^x \quad f'(1) = e$

$f''(x) = e^x \quad f''(1) = e$

$$f(x) = e^x = \frac{e(x-1)^0}{0!} + \frac{e(x-1)^1}{1!} + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \frac{e(x-1)^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}$$

$$|e| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{(x-1)^n}{n!} \right| < 1$$

$$|e| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(x-1)^n}(x-1)\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\cancel{(x-1)^n}} \right| < 1$$

$$|e(x-1)| \lim_{n \to \infty} \left| \cancel{\frac{1}{n+1}}^{0} \right| < 1 \quad \therefore \quad x \in \mathbb{R}$$

Exemplo $f(x) = e^{2x}$ para série de Mac-Laurin

$f(x) = e^{2x} - f(0) = 1$

$f'(x) = 2e^{2x} \to f'(0) = 2$

$f''(x) = 4e^{2x} \to f''(0) = 4$

$f'''(x) = 8e^{2x} \to f'''(0) = 8$

$f^{IV}(x) = 16e^{2x} \to f^{IV}(0) = 16$

$$f(x) = e^{2x} \simeq \frac{1 \cdot x^0}{0!} + \frac{2 \cdot x^1}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n \cdot x^n}{n!} \right| < 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cancel{x^n} \cdot x \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\cancel{2^n} \cdot \cancel{x^n}} \right| < 1 \quad |2x| \lim_{n \to \infty} \left| \cancel{\frac{1}{n+1}}^{0} \right| < 1$$

$$\therefore x \in \mathbb{R}$$

HOMEWORK

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} (-1)^n$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2x)^{n+1}}{n+1} : \frac{(2x)^n}{n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(2x)^n}(2x) \cdot n}{(n+1) \cdot \cancel{(2x)^n}} \right| < 1$$

$$|2x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| < 1 \qquad |2x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{5n+2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{(n+1)} (x-1)^{n+1}}{5n+7} : \frac{2^n \cdot (x-1)^n}{5n+2} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \, \cancel{(x-1)^n} (x-1) \cdot (5n+2)}{(5n+7) \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{(x-1)^n}} \right| < 1$$

$$|2(x-1)| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5n+2}{5n+7} \right| < 1$$

$$|2(x-1)| < 1 \qquad -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$$

$$|x-1| < \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

Para $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n}{5n+2}$$

→ HOMEWORK $f(x) = \sin(3x)$ para $x_0 = 0$

$f(x) = \sin(3x)$ $f(0) = 0$

$f'(x) = 3\cos(3x)$ $f'(x) = 3$

$f''(x) = -9\sin(3x)$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -27\cos(3x)$ $f'''(0) = -27$

$f^{IV}(x) = 81\sin(3x)$ $f^{V}(0) = 0$

$f^{VI}(x) = 243\cos(3x)$ $f^{VI}(0) = 243$

$f^{VII}(x) = -729\sin(3x)$ $f^{VII}(0) = 0$

$f^{VIII}(x) = -2187\cos(3x)$ $f^{VIII}(0) = -27187$

$$sen(3x) = \frac{3x^1}{1!} - \frac{27x^3}{3!} + \frac{243x^5}{5!} - \frac{27167x^7}{7!} + \dots$$

1 2 3 4

Termo Geral

$2n-1$

$2n+1$

$$sen(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{3^{2n+3} \cdot x^{2n+3}}{(2n+3)!} \div \frac{3^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{3^{2n}} \cdot \cancel{3} \cdot 3^2 \cdot \cancel{x^{2n}} \cdot \cancel{x} \cdot x^2 \cdot \cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}\cancel{3^{2n}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{x^{2n}} \cdot \cancel{x}} \right| < 1$$

$$|3^2 x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}}_{0} \right| < 1 \quad \therefore x \in \mathbb{R}$$

3-) Desenvolver $f(x) = \cos(3x)$

$f(x) = \cos(3x)$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -3\,sen(3x)$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -9\cos(3x)$ $\quad f''(0) = -9$

$f'''(x) = 27\,sen(3x)$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 81\cos(3x)$ $\quad f^{IV}(0) = 81$

$f^{V}(x) = -243\,sen(3x)$ $\quad f^{V}(0) = 0$

$f^{VI}(x) = -729\cos(3x)$ $\quad f^{VI}(0) = -729$

Termo Geral

$$f(x) = \cos(3x) \simeq \frac{x^0}{0!} - \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^4}{4!} - \frac{729x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\, 9^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot 9^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^n \cdot 9^{2n}}{(2n)!} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot \cancel{9^{2n}} \cdot 9^2 \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!} \cdot \cancel{x^n}\, \cancel{9^{2n}}} \right| < 1 \quad |9^2 \cdot x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \right| < 1$$

$\therefore x \in \mathbb{R}$

Desenvolver $f(x) = \frac{4}{1+x}$ em uma série de Mac-Laurin

$f(x) = \frac{4}{1+x}$. $f(0) = 4$

$f'(x) = -4(1+x)^{-2}$ $f'(0) = -4$

$f''(x) = 8(1+x)^{-3}$ $f''(0) = 8$

$f'''(x) = -24(1+x)^{4}$ $f'''(0) = -24$

$f^{iv}(x) = 96(1+x)^{-5}$ $f^{iv}(0) = 96$

$f^{v}(x) = -480(1+x)^{-6}$ $f^{v}(0) = -480$

$$f(x) = \frac{4x^0}{0!} - \frac{4x^1}{1!} + \frac{8x^2}{2!} - \frac{24x^3}{3!} + \frac{96x^4}{4!} - \frac{480x^5}{5!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4x^n (-1)^n$$

Lista do Base

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n+5}\right)^{4n+3}$ Pelo critério da raiz enésima

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n+5}\right)^{\frac{4n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(1+\cancel{1/n}^{0})}{\cancel{n}(3+\cancel{5/n}^{0})}\right)^{4+\cancel{\frac{3}{n}}^{0}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 < 1$$

$\therefore$ Convergente

b) $\sum \frac{n^3}{n^4+9}$ Pelo critério da comparação por limites

$\sum b_n = \sum \frac{n^3}{n^4} = \sum \frac{1}{n}$ (série p, $p \leq 1$ $\therefore$ Diverge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^4+9} \div \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^4+9}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^4}(1+\cancel{9/n^4}^{0})}\right) = 1$$

$\therefore$ Diverge

c) $\sum_{1}^{\infty} n.e^{-n}$ Pelo critério da razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\,e^{-(n+1)}}{n\,e^{-n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\,\cancel{e^{-n}}\,e^{-1}}{n\,\cancel{e^{-n}}} \right) = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$l = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}} \right) = \frac{1}{e} < 1 \quad \therefore \text{ Converge}$$

d) $\sum \frac{3^{n-1}}{n^2+1}$ Pela comparação por limites

$\sum b_n = \sum \frac{3^n}{n^2}$ (Pelo critério da razão)

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{3^n}.3.n^2}{(n+1)^2.\cancel{3^n}} \right)$$

$$l = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+1/n)} \right)^2 = 3 > 1 \quad \therefore \text{ Diverge}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n-1}}{n^2+1} \div \frac{3^n}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{3^n}.3^{-1}.n^2}{(n^2+1).\cancel{3^n}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(1+1/n^2)} \right) = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ Diverge

e) $\sum \frac{2^n.n!}{n^n}$ Pelo critério da razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}.(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{2^n.n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{2^n}.2\,\cancel{(n+1)}.\cancel{n!}.n^n}{(n+1)^n\,\cancel{(n+1)}.\cancel{2^n}\,\cancel{n!}} \right)$$

$$l = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1 \quad \therefore \text{ Converge}$$

f) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ Pelo TCN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n^2)}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{(1+1/n^2)}} = 1$$

$\therefore$ Diverge

g) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2}$ Pelo comparação por limite

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ (série p, $p>1$ $\therefore$ converge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}(n) . n^2}{1+n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(\operatorname{arctg}(n))}{\cancel{n^2}(1+1/n^2)} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ Converge

h) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \ln(x) . x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(x).(-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\left| \frac{1-\ln x}{x^2} \right| < 0$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$\ln(x) = t$

$\frac{1}{x} dx = dt$

$$\sim \int_2^{\infty} t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln \infty^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} \right) = \infty$$

$\therefore$ Divergente

i) $\sum \frac{2n^2}{n+5}$ Pelo TCN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{1} = \infty \therefore \text{Diverge}$$

j) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$ Pelo TCN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n+1/n^2)}} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+1/n+1/n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} = 1 \therefore \text{Diverge}$$

k) $\sum \frac{1}{3n+1}$ Pela comparação por limites

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ (série p, $p \leq 1 \therefore$ Diverge)

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \therefore \text{Diverge}$$

l) $\sum \frac{n!}{2^n+1}$ Pela razão

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1} : \frac{n!}{2^n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1).\cancel{n!}\,(2^n+1)}{(2^n.2+1)\,\cancel{n!}} \right)$$